Bem: Ist F rechts-exakt (kovariant oder kontravariant), dann ist $L_0 F = F$

($P_1 \to P_0 \to M \to 0$ ex $\Rightarrow$ $FP_1 \to FP_0 \to FM \to 0$ ex.)

Insbes. induziert k.e.S. $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ eine l. ex. Homologie-Seq.

$\dots \to L_1 F M \to L_1 F M'' \to FM' \to FM \to FM'' \to 0$

Deshalb betrachte links-derivierte $L_i F$ üblicherweise nur für F rechts-exakt.

Entsprechend betrachte rechts-derivierte $R^i F$ falls F links-exakt.

Bem: Ist F exakt, so ist $L_0 F = R^0 F = F$ und $L_n F = R^n F = 0$ für $n > 0$.

Bem 2.33: Ist $F: R\text{-mod} \to Ab$ kovariant, rechts-exakt dann sind die derivierten Funktoren $L_n F$ eindeutig bestimmt durch:

(i) $L_0 F M \cong F M$ für alle $M \in R\text{-mod}$

(ii) $L_n F P = 0$ für alle $n > 0$ falls P projektiv.

(iii) Für jede k.e.S. $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ ex. l.e.HS wie in Satz 2.32.

(Ohne Beweis.)

Die wichtigsten Beispiele sind die derivierten von Hom und $\otimes$: Ext und Tor.

Def. 2.34: Sei $F(A,B)$ Bi-Funktor von R-mod, kovariant und rechts-exakt in beiden Arg.
F heißt R-balanciert (oder ausgeglichen) falls $F(P, -)$ und $F(-, P)$ exakte Funktoren sind für P projektiv.
(Entsprechend für kontravariant, links exakt, etc.)

Satz 2.35: Sei F Bi-Funktor, kovar. & rechts-ex. in beiden Arg.
Seien $L_n F(-, B)$, $L'_n F(A, -)$ die derivierten Funktoren von $F(-, B)$ bzw. $F(A, -)$ (d.h. erhalten durch Auflösen des linken bzw. rechten Arguments).
Falls F balanciert ist, ist $L_n F(A,B) \cong L'_n F(A,B)$, und der Iso ist natürlich in A und B.

Bew: Wir benutzen die Eindeutigkeit aus Bem. 2.33, d.h. es reicht zu zeigen, dass für jedes $A \in R\text{-mod}$ die Funktoren $L_n F(A, -)$ die Bed. (i) - (iii) erfüllen (als derivierte von $F(A, -)$). (Nach Eindeutigkeit ist dann $L_n F(A, -) = L'_n F(A, -)$.)

(i) $L_0 F(A,B) \cong F(A,B)$: ✓

(ii) Sei P projektiv, $n \geq 1$. Zu zeigen: $L_n F(A,P) = 0$

Da $F(\_,P)$ exakt, ist $L_n F(\_,P) = 0$ für $n \geq 1$. (Insbes. $L_n F(A,P) = 0$)

(iii) Sei (*) $0 \to B' \to B \to B'' \to 0$ k.e.S. gegeben. Wähle proj. Auflösung $C \to A \to 0$. Wende $F(C_i, \_)$ auf (*) an. Das liefert k.e.S.

$$0 \to F(C_i, B') \to F(C_i, B) \to F(C_i, B'') \to 0$$

Erhalte so k.e.S. von Komplexen $0 \to F(C, B') \to F(C,B) \to F(C, B'') \to 0$, also l.e.HS $\ldots \to L_n F(A,B) \to L_n F(A,B'') \to L_{n-1} F(A,B') \to \ldots$ nach Satz 2.22. ☐

<u>Bsp 2.36:</u> • $F(A,B) = \mathrm{Hom}(A,B)$ ist links-ex. kovar in B und links-ex. kontra-var in A. (Satz 1.26). Ist P projektiv, so ist $\mathrm{Hom}(P,-)$ exakt, und ist I injektiv, so ist $\mathrm{Hom}(-,I)$ exakt. Also ist $\mathrm{Hom}(-,-)$ balanciert.

• Definiere $\mathrm{Ext}^n(-,-)$ als n. rechtsderivierten von $\mathrm{Hom}(-,-)$. Nach Satz 2.35 kann man $\mathrm{Ext}^n(A,B)$ entweder mit einer proj. Aufl. von A oder mit einer inj. Aufl. von B berechnen.

• Es gibt eine Bijektion zwischen $\mathrm{Ext}^1(A,B)$ und den Erweiterungen von A um B: Eine Erw. von A um B ist ein Modul E zusammen mit einer k.e.S.:

(*) $$0 \to B \xrightarrow{\beta} E \xrightarrow{\alpha} A \to 0$$

Zwei solche Erweiterungen E, E' heißen äquivalent, falls es Iso $E \to E'$ gibt, so dass

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d] \arrow[dr] & \\ B \arrow[ur] \arrow[r] & E' \arrow[r] & A \end{tikzcd}$$

kommutiert. (Das ist Äqu-Rel.)

• Es gibt immer mindestens eine Erw.: $B \to B \oplus A \to A$.

• Aus (*) erhalten wir durch Anwenden von $\mathrm{Hom}(A,-)$ ex. Seq.:

$$0 \to \mathrm{Hom}(A,B) \xrightarrow{\beta^*} \mathrm{Hom}(A,E) \xrightarrow{\alpha^*} \mathrm{Hom}(A,A) \xrightarrow{\Delta} \mathrm{Ext}^1(A,B) \to \ldots$$

$\Delta(1_A)$ heißt charakteristische Klasse der Erw.; das induziert Bijektion

$$\{\text{Erw. von } A \text{ durch } B\}/_{\text{Äquiv.}} \xrightarrow{1:1} \mathrm{Ext}^1(A,B)$$

(Mehr dazu in ÜA)

- Habe $\Delta(1_A) = 0 \Leftrightarrow (*)$ zerfällt: $\alpha(1_A) = 0 \Leftrightarrow 1_A$ liegt im Bild von α^*, d.h. $1_A = \alpha\varphi$ für ein $\varphi \in \mathrm{Hom}(A, E)$

<u>Satz 2.37:</u> Sei R Ring, $M \in R$-mod. Dann sind äquivalent:

(i) $hd(M) \leq n$

(ii) $\mathrm{Ext}^k(M, \_) = 0$ für alle $k > n$

(iii) $\mathrm{Ext}^{n+1}(M, \_) = 0$

<u>Bew:</u> Aus der Bem. vor Satz 2.32 folgt:

$$\mathrm{Ext}^k(M, B) = \mathrm{Ext}^{k-1}(\pi(M), B)$$

(i) $\Rightarrow$ (ii): $\mathrm{Ext}^k(M, B) = \mathrm{Ext}^{k-1}(\pi(M), B) = \ldots = \mathrm{Ext}^{k-n}(\pi^n(M), B) = 0$, da $k > n$ und $\pi^n(M)$ projektiv.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Trivial.

(iii) $\Rightarrow$ (i): Zu zeigen: $\pi^n(M)$ ist projektiv.

Habe $\mathrm{Ext}^1(\pi^n(M), \_) = \ldots = \mathrm{Ext}^{n+1}(M, \_) = 0$

Aus K.e.S. $0 \to B' \to B \to B'' \to 0$ erhalte l.e.HS.:

$$0 \to \mathrm{Hom}(\pi^n(M), B') \to \mathrm{Hom}(\pi^n(M), B) \to \mathrm{Hom}(\pi^n(M), B'') \to \underset{\overset{\parallel}{0}}{\mathrm{Ext}^1(\pi^n(M), B')}$$

Also ist $\mathrm{Hom}(\pi^n(M), \_)$ exakt, also $\pi^n(M)$ projektiv.

<u>Bem 2.38:</u> Spezialfall: Es sind äquivalent: (i) M proj.

(ii) $\mathrm{Ext}^n(M, \_) = 0 \quad \forall n > 0$

(iii) $\mathrm{Ext}^1(M, \_) = 0$

(iv) Jede Erweiterung von M spaltet

<u>Satz 2.39:</u> Für jeden R-Modul M sind äquivalent:

(i) $cd(M) \leq n$ (cd = Kohomolog. dim = inj. dim)

(ii) $\mathrm{Ext}^k(\_, M) = 0$ für $k > n$

(iii) $\mathrm{Ext}^{n+1}(\_, M) = 0$

(iv) $\mathrm{Ext}^{n+1}(C, M) = 0$ für alle zyklischen Moduln C (d.h. $C \cong R/I$)

<u>Bew:</u> (i) $\Leftrightarrow$ (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) dual zu 2.37, (iii) $\Rightarrow$ (iv): klar.

(iv) $\Rightarrow$ (i): Wir schreiben $\iota(M)$ für das duale zu $\pi(M)$

Zu zeigen: $\iota^n(M)$ ist injektiv. Nach Baers Kriterium reicht es

$$\begin{tikzcd} & \iota^n(M) \\ R \arrow[ur, dashed, "?"] & I \arrow[l, hook'] \arrow[u, "\varphi"] \end{tikzcd}$$

zu finden für jedes Ideal I.

K.e.S. $0 \to I \to R \longrightarrow R/I \longrightarrow 0$ liefert

$0 \to \mathrm{Hom}(R/I, \iota^n(M)) \to \mathrm{Hom}(R, \iota^n(M)) \longrightarrow \mathrm{Hom}(I, \iota^n(M)) \longrightarrow \underbrace{\mathrm{Ext}^1(R/I, \iota^n(M))}_{=0 \text{ n.V.}}$

D.h. jedes $\varphi \in \mathrm{Hom}(I, \iota^n(M))$ liftet zu $\mathrm{Hom}(R, \iota^n(M))$.

<u>Kor. 2.40</u>: Für jeden Ring ist

$$\begin{aligned} \mathrm{gl.dim}(R) &= \sup\{\mathrm{hd}(M) \mid M \text{ R-Mod}\} = \sup\{n \mid M, N \text{ R-Mod mit } \mathrm{Ext}^n(M,N) \neq 0\} \\ &= \sup\{\mathrm{cd}(M) \mid M \text{ R-Mod}\} \\ &= \sup\{\mathrm{hd}(C) \mid C \text{ zykl. R-Mod}\}. \end{aligned}$$

<u>Bem</u>: Wir werden zeigen: R noethersch $\Rightarrow$ gl-dim für links- und rechts-Moduln gleich.

<u>Bsp. 2.41: Der Funktor Tor</u>

Der Bifunktor $A \otimes B$ ist kovar, rechts-ex. in beiden Argumenten.

Wir zeigen, dass $\otimes$ balanciert ist.

<u>Def. 2.42</u>: Ein rechts-R-Mod. M heißt <u>flach</u>, wenn $M \otimes_R -$ exakt ist.

<u>Satz 2.43</u>: Projektive R-Moduln sind flach.

<u>Bew</u>: Sei P projektiv und $0 \longrightarrow N' \longrightarrow N \longrightarrow N'' \longrightarrow 0$ k.e.S.

Wähle Q mit $P \oplus Q \simeq A = \bigoplus_I R$. Für M beliebig habe $P \otimes M \oplus Q \otimes M \simeq A \otimes M \simeq \bigoplus_I M$

$\Rightarrow$ erhalte k.e.S. $0 \longrightarrow A \otimes N' \longrightarrow A \otimes N \longrightarrow A \otimes N'' \longrightarrow 0$.

und dann $0 \longrightarrow P \otimes N' \longrightarrow P \otimes N \longrightarrow P \otimes N'' \longrightarrow 0$. $\square$

Also ist $\otimes$ balanciert. Definiere $\mathrm{Tor}_n^R(A,B)$ als den n. links-derivierten von $A \otimes_R B$. (Tor_n^R erhält man durch proj. Auflösen von A oder B).

<u>Bsp</u>: $R = \mathbb{Z}$

Nach Satz 2.19 ist $\mathrm{gl\text{-}dim}(\mathbb{Z}) = 1$, d.h. habe proj. Aufl. der Länge ≤ 1

$\Rightarrow \mathrm{Tor}_n^{\mathbb{Z}} = 0$ für $n \geq 2$.

Sei $C_k := \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$

Wir berechnen $\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(C_k, C_\ell)$: Das geht mit proj. Auflösung oder mit l.e.HS:

Die k.e.S. (*) $0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot k} \mathbb{Z} \to C_k \to 0$ induziert:

$$\begin{tikzcd} \ldots \arrow[r] & \mathrm{Tor}_1(\mathbb{Z}, C_\ell) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathrm{Tor}_1(C_k, C_\ell) \arrow[r] & \mathbb{Z} \otimes C_\ell \arrow[r, "\cdot k"] \arrow[d, equal] & \mathbb{Z} \otimes C_\ell \arrow[r] \arrow[d, equal] & C_k \otimes C_\ell \arrow[r] & 0 \\ & 0 & & C_\ell \arrow[r, "\cdot k"] & C_\ell & & \end{tikzcd}$$

da $\mathbb{Z}$ projektiv

$\Rightarrow \mathrm{Tor}_1(C_k, C_\ell) = \ker(C_\ell \xrightarrow{\cdot k} C_\ell) = C_{ggT(k,\ell)}$ Daraus erhalte Formel für $\mathrm{Tor}_1(G,H)$ für G,H endl. erz. ab. Grp.

Wenn man $\mathrm{Tor}_1(C_k, C_\ell)$ berechnet, indem man (*) als proj. Auflösung von C_k auffasst, macht man genau die selbe Rechnung. Vorteil der l.e.HS ist aber, dass man nicht wissen muss, ob das linke $\mathbb{Z}$ projektiv ist (spart Arbeit falls gl dim > 1).

<u>Satz 2.44</u>: Es sind äquivalent:

(i) M ist flach

(ii) $\mathrm{Tor}_n(M, -) = 0$ für alle $n \geq 1$

(iii) $\mathrm{Tor}_1(M, -) = 0$

<u>Bew</u>: (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) ist klar.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Sei $0 \to N' \to N \to N'' \to 0$ k.e.S. und sei $\mathrm{Tor}_1(M, -) = 0$

$\leadsto$ l.e.HS $\underbrace{\mathrm{Tor}_1(M, N'')}_{=0} \to M \otimes N' \to M \otimes N \to M \otimes N'' \to 0$

also M flach. □

<u>Def. 2.45</u>: Die <u>schwache Dim</u> eines rechts-R-Mod ist:

$$wd(M) := \sup\{n \mid \mathrm{Tor}_n(M, -) \neq 0\}$$
$$= \min\{k \mid \pi^k M \text{ flach}\}$$ (Links-R-Mod entsprechend).

Die schwache globale Dim von R ist

$$w.gl.\dim(R) = \sup\{n \mid \mathrm{Tor}_n^R \neq 0\} = \sup\{wd(M) \mid M \text{ Rechts-R-Mod}\}$$
$$= \sup\{wd(M) \mid M \text{ Links-R-Mod}\}$$

<u>Bem</u>: Offensichtlich ist $wd(M) \leq hd(M)$ und $w.gl.\dim(R) \leq gl\text{-}\dim(R)$

Wir werden zeigen: noethersch $\Rightarrow$ w.gl.dim = gl.dim. Daraus folgt Gleichheit von linker und rechter gl.dim.

Lemma 2.46: Sei R rechts-noethersch, C divisible ab. Grp.,

A, B rechts-R-Mod., A endl. erzeugt, $n \geq 0$

Dann habe natürlichen Iso.

$$\mathrm{Tor}_n^R(A, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(B, C)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{Ext}_R^n(A, B), C)$$

Bew: Habe $(A_R,\ {}_{\mathbb{Z}}B_R,\ {}_{\mathbb{Z}}C)$; $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(B, C)$ ist links-R-Modul durch $(rf)(b) = f(br)$

Betrachte erst mal $n=0$ und A projektiv

- Habe $\varphi: A \otimes_R \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(B, C) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{Hom}_R(A, B), C)$

$$a \otimes f \longmapsto (\theta \longmapsto f(\theta(a)))$$

Diese Abb. ist additiv in a, f und $\varphi(ar \otimes f) = \varphi(a \otimes rf)$, also in der Tat wohldefiniert.

- (φ ist natürlich in A, B, C)
- Falls $A = R$, steht links und rechts $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(B, C)$ und φ ist Iso.

$\Rightarrow \varphi$ ist Iso falls A endl. erzeugt, frei (da $\oplus$ rausgezogen werden kann)

$\Rightarrow \varphi$ Iso falls A endl. erzeugt projektiv

Jetzt betrachte n, A beliebig (endl. erz.)

- Habe kovariante, rechts-exakte Funktoren $F_1 = \_ \otimes_R \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(B, C)$, $F_2 = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{Hom}_R(-, B), C)$

(Für F_2 verwende C divisibel $\Rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\_, C)$ exakt)

- Wähle proj. Auflösung $P \longrightarrow A$. Da R rechts-noethersch und A endl. erz.

können wir die P_i endlich erzeugt wählen

$\Rightarrow$ Erster Teil liefert Iso $\varphi: F_1(P_i) \longrightarrow F_2(P_i)$.

Wegen Natürlichkeit von φ ist das Iso von Komplexen; erhalte also auch Iso

$$\begin{array}{ccc} H_n(F_1(P)) & \longrightarrow & H_n(F_2(P)) \\ \parallel & & \parallel \\ \mathrm{Tor}_n^R(A, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(B, C)) & & H_n(\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{Hom}_R(P, B), C)) \\ & & \parallel \quad \text{da } \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(-, C) \text{ exakt} \\ & & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(H^n(\mathrm{Hom}_R(P, B)), C) \\ & & \parallel \\ & & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{Ext}_R^n(P, B), C) \end{array}$$

$\square$

Korollar 2.47: R rechts-noethersch $\Rightarrow$ r.gl dim (R) = w.gl dim (R).

Bew: Falls $\mathrm{Ext}_R^n(A, B) \neq 0$ wähle C divisibel mit $\mathrm{Ext}_R^n(A, B) \subset C$.

$\Rightarrow$ Rechte Seite von Lemma 2.46 ist $\neq 0 \Rightarrow \mathrm{Tor}_n^R(\ldots) = 0$