Bem: Die div. ab. Gr. sind $\mathbb{Q}$-VR und Prüfergr., d.h. $\mathbb{Z}_{p^\infty}$, die Gr. aller p^n-ten Einh.wurzeln, $n \in \mathbb{N}$. Jede div. ab. Gr. ist direkte Summe von Gr. dieser Form. Die $\mathbb{Q}$-VR sind genau die tors.fr. div. ab. Gr.

2.7. Ring-Wechsel-Funktoren: Sind R, S Ringe, $f : R \to S$ ein Homom., dann induziert f auf einem S-Rechts-Modul M eine R-Rechtsmodulstr. durch

$$x r = x f(r) \quad \text{für } x \in M, r \in R$$

Diese R-Wirkung auf M heißt Pullback mit f.

Wir erhalten einen Funktor ${}^f\_ : \mathrm{Mod}_S \to \mathrm{Mod}_R$ ${}^f x = x$

Satz 2.8 Seien R, S Ringe, $f : R \to S$ ein Homom. Dann ist der Funktor $\_{}_f : \mathrm{Mod}_R \to \mathrm{Mod}_S$, $M_f = M \otimes_R S$ linksadj. zu ${}^f\_$, d.h. $\mathrm{Hom}_S(M_f, U) \simeq \mathrm{Hom}_R(M, {}^f U)$ und der Funktor $\_^f : \mathrm{Mod}_R \to \mathrm{Mod}_S$ mit $N^f = \mathrm{Hom}_R(S, N)$ ist rechts adj zu ${}^f\_$, d.h. $\mathrm{Hom}_S(U, N^f) \simeq \mathrm{Hom}_R({}^f U, N)$.

Der Modul M_f heißt f-induzierter, der Modul N^f heißt f-koinduzierter Modul.

Beide Funktoren sind kovariant.

Bew: Es ist nach Satz 2.2

$$\mathrm{Hom}_S(M_f, U) = \mathrm{Hom}_S(M \otimes_R S, U) \simeq \mathrm{Hom}_R(\cancel{\mathrm{Hom}}\,\mathrm{Hom}_S(S, U))$$
$$= \mathrm{Hom}_R(M, {}^f U)$$

und

$$\mathrm{Hom}_S(U, N^f) = \mathrm{Hom}_S(U, \mathrm{Hom}_R(S, N)) \simeq \mathrm{Hom}_R(U \otimes_S S, N)$$
$$= \mathrm{Hom}_R({}^f U, N).$$

Kor 2.10 Ist M ein proj. R-Modul, dann ist M_f ein proj. S-Modul. Ist M inj. R-Mod, dann ist M^f als S-Modul inj.

Bew: Aus der Exaktheit von $\mathrm{Hom}_R(M,-)$ folgt mit Satz 2.8 die Exheit von $\mathrm{Hom}_S(M_f,-)$. Entspr. für inj.

Def 2.11 Eine ab. Kat $\mathcal{C}$ besitzt genügend proj. Obj., falls für jedes $B \in \mathrm{ob}\,\mathcal{C}$ ein proj. Obj. $A \in \mathrm{ob}\,\mathcal{C}$ und ein Epi $e: A \to B$ ex. $\mathcal{C}$ besitzt genügend inj. Obj., wenn es für jedes Obj. B ein inj. Obj. A und einen Monom $B \to A$ gibt.

Bem: R-Mod hat genügend proj. Obj., denn jeder Modul ist Quotient eines freien Moduls und freie Moduln sind proj.

Satz 2.12 Sei R ein bel. Ring. Dann hat R-Mod (rechts oder links) genügend Injekt., d.h. jeder R-Modul lässt sich in einen inj. Modul einbetten.

Bew: Sei zuerst $R = \mathbb{Z}$. ~~Ein~~ Jede ab. Gr. A ist Quotient einer freien ab. Gr., d.h. $A \cong F/N$ mit $F \cong \mathbb{Z}^K \hookrightarrow \mathbb{Q}^K$. Dann ist $G = \mathbb{Q}^K$ div. ab. Gr., also auch G/N div. und daher inj. Dann ist $F/N \cong A$ ein $\mathbb{Z}$-Untermod. von G/N.

Sei nun R ein bel. Ring. Dann ex ein natürl. Homom $f: \mathbb{Z} \to R$, $n \mapsto n \cdot 1$, d.h. jeder R-Modul wird durch Pullback zum $\mathbb{Z}$-Modul. ($f\_$ ist der Vergiss-Funktor $R\text{-Mod} \to Ab$). Als $\mathbb{Z}$-Modul kann ${}^f M$ in einen inj. $\mathbb{Z}$-Modul J eingebettet werden. Wegen $M \simeq \mathrm{Hom}_R(R, M) \hookrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, M)$ als R-Untermodul und

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, M) \hookrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, J) = J^f$$

als R-Untermodul erhalten wir eine Einbettung von R-Moduln $M \hookrightarrow J^f$ und J^f ist inj. R-Modul nach Kor. 2.10.

<u>Satz</u> 2.13 (Injektive Hülle eines Moduls)
Sei R ein Ring, $M \subseteq E$ R-Moduln.
Dann sind äquivalent

(i) E ist max. wesentl. Erw. von M

(ii) E ist min. inj. R-Modul, der M enthält.

~~(ii) E ist min inj. R-Modul, der M enthält.~~

Ein Modul E, der (i) bzw (ii) erfüllt, heißt <u>injektive Hülle</u> von M. Ist E' eine weitere inj Hülle, dann ex. ein Isom. $\varphi: E \to E'$ mit $\varphi_M = \mathrm{id}$.

Inj. Hüllen existieren.

<u>Bew</u>: Zuerst zur Existenz und Eindeutigkeit.

Sei M ein R-Modul, $J \supseteq M$ inj. R-Modul, und $E \subseteq J$ eine max. wesentl. Erw. von M (mit Zorns Lemma). Ist E' ein weiterer R-Modul, der (i) bzw (ii) erfüllt, dann läßt sich $\varphi = \mathrm{id}_M$ wegen der Injekt. von E' zu einem Homom $\bar\varphi: E \to E'$ fortsetzen.

Dann ist $\ker \bar\varphi \cap M = 0$, also $\ker \bar\varphi = 0$ wegen (i).

Wegen $\operatorname{im} \bar\varphi \simeq E$ ist dann auch $\operatorname{im} \bar\varphi \subseteq E'$ inj., nach (ii) also $\operatorname{im} \bar\varphi = E'$, d.h. $\bar\varphi$ ist Isom.

Nun zur Äquiv. von (i) $\Leftrightarrow$ (ii).

(i) $\Rightarrow$ (ii) Sei E max. wesentl. Erw. von M. Dann folgt aus 2.4, dass E inj. ist. Ist $E' \subseteq E$ mit $M \subseteq E'$ inj., dann ex. ein Kompl. N für E' in E, d.h. $E \simeq N \oplus E'$.

Wegen $M \cap N = 0$ widerspricht dies (i).

(ii) $\Rightarrow$ (i) Sei E min. inj. Modul, der M enthält und F eine wesentl. Erw. von M. Dann lässt sich F in E einbetten

$$\begin{tikzcd} & E & \\ 0 \arrow[r] & M \arrow[u] \arrow[r] & E \arrow[ul, "f"'] \end{tikzcd}$$

. Dann ist $M \cap \ker f = 0$, also $\ker f = 0$, da F wesentl. Erw. Daher ist $F \subseteq E$. Ist F max. wesentl.

Erw., dann ist F inj. wegen (i) $\Rightarrow$ (ii).
Aus der Minimalität folgt also $F = E$.

Bem: Die inj. Hülle ist zwar bis auf Isom. über dem Modul eind. Dieser Isom. ist aber durch Zorns Lemma gegeben, und nicht kanonisch. Es gibt keinen Funktor $M \mapsto$ inj Hülle(M).

Erinnerung: Komplexe in ab. Kat., jetzt speziell für R-Moduln. Sei R ein Ring. Ein Komplex (C, d) für R ist eine Familie $(C_i)_{i \in \mathbb{Z}} = C$ von R-Mod zusammen mit einer Familie $d = (d_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ von R-Mod-Hom. $d_i : C_i \to C_{i-1}$ und $d_{i-1} d_i = 0$.

Sind (C, d), (C', d') R-Komplexe, dann ist ein (Ketten-) Homom. von C nach C' gegeben als $\alpha = (\alpha_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ von R-Mod.-Homom. $\alpha_i : C_i \to C_i'$, so dass folg. Diagr. kommutiert:

$$\begin{tikzcd} C_i \arrow[r, "d_i"] \arrow[d, "\alpha_i"'] & C_{i-1} \arrow[d, "\alpha_{i-1}"] \\ C_i' \arrow[r, "d_i'"] & C_{i-1}' \end{tikzcd}$$

Es ist leicht zu sehen, dass die Klasse der R-Kompl. damit zu einer ab. Kat. wird.

Def 2.14 Ist M ein R-Modul, dann heißt ein pos. Komplex (C, d) mit einer Augmentierung $\varepsilon : C_0 \to M$ und $\varepsilon d_1 = 0$ ein Komplex über M.

$$(*) \qquad \longrightarrow C_i \xrightarrow{d_i} C_{i-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow C_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \longrightarrow 0$$

Der Komplex (C, ε) über M heißt <u>Auflösung</u> von M, falls (*) ex. ist und proj., falls alle C_i proj.

<u>Bsp</u>: 2.15 (i) Jeder R-Modul hat sogar eine <u>freie</u> Aufl., d.h. mit allen C_i freie R-Moduln.

(ii) Sei $R = K[X, Y]$, K ein Körper als R-Modul durch den Pullback $f: R \to R/(X,Y) \cong K$.

Dann bekommen wir eine proj. Auflösung von K als R-Modul durch

$$0 \to R \xrightarrow{f_3} R^2 \xrightarrow{f_2} R \xrightarrow{f_1} K \longrightarrow 0$$

mit $f_1: R \longrightarrow R/(X,Y) \cong K$ Proj.

$f_2: R^2 \longrightarrow (X, Y)$, $(a, b) \longmapsto aX - bY$.

$\ker f_2 = \{(cY, cX); c \in R\} \cong R$, also

$f_3: R \to R^2$, $c \longmapsto (cY, cX)$.

(iii) $R = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, $M = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Dann ist M als R-Mod. nicht proj. (denn $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to 0$ splittet nicht). Wir erhalten eine unendl. Aufl.

$$\ldots \to R \xrightarrow{f_2} R \xrightarrow{f_1} M \longrightarrow 0$$

durch $f_1: \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $x \longmapsto 2x$

Dann ist $\ker f_1 = 2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

Also $f_2: \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $x \longmapsto 2x$ etc.

Prop 2.16 Sei R ein Ring, M ein R-Modul und

$$0 \to A \to P \to M \to 0$$
$$0 \to B \to Q \to M \to 0$$

kurze ex. Seq. von R-Moduln mit P proj.

Dann ist $(+)$ $\quad 0 \to A \to P \oplus B \to Q \to 0$ ex.

Bew: Mit dem Pullback von $P \to M$, $Q \to M$ erhalten wir

$$\begin{tikzcd}
 & & A' \arrow[d] & A \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & B' \arrow[r] & C \arrow[r] \arrow[d] & P \arrow[r] \arrow[d] & 0 & (*) \\
0 \arrow[r] & B \arrow[r] & Q \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d] & 0 & \\
 & & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

$(**)$

Nach Lemma 1.28 sind $A' \simeq A$, $B \simeq B'$. Weil P proj. ist, zerfällt $(*)$, also $C \simeq P \oplus B' \simeq P \oplus B$. Wegen $A' \simeq A$ folgt damit aus $(**)$ die Beh.

Kor 2.17 (Schanuels Lemma). Sind in 2.17 P und Q proj., dann folgt $P \oplus B \simeq Q \oplus A$.

Bew: Ist Q proj., dann zerfällt $(+)$.

Def 2.18 R-Moduln M, N heißen <u>proj. äquivalent</u>, wenn es proj. Moduln P, Q gibt mit $M \oplus P \simeq N \oplus Q$.

Da die dir. Summe proj. Moduln wieder proj. ist, ist dies eine Äquiv. rel. Die Äquivkl. von M bezeichnen wir mit $[M]$, d.h. $[M] = 0$ gdw M proj.