Def 1.8 Seien $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ Funktoren. Eine natürl. Transformation von F nach G ist eine Abb φ, die jedem $A \in \mathrm{ob}\,\mathcal{C}$ einen Morph $\varphi_A \in \hom_{\mathcal{D}}(FA, GA)$ zuordnet, so dass für alle $A, B \in \mathrm{ob}\,\mathcal{C}$ und $f \in \hom_{\mathcal{C}}(A,B)$

das Diagramm kommutiert

$$\begin{tikzcd} FA \arrow[r, "Ff"] \arrow[d, "\varphi_A"'] & FB \arrow[d, "\varphi_B"] \\ GA \arrow[r, "Gf"'] & GB \end{tikzcd}$$

$$A \xrightarrow[f]{} B$$

Falls jedes φ_A ein Isom. ist, heißt φ natürl. Isom.

Bsp: (i) Sei V ein K-VR, $V^* = \mathrm{Hom}(V, K)$, $V^{**} = \mathrm{Hom}(V^*, K)$ sein Doppeldualraum. Dann ex. eine lin. Abb.

$$\varphi_V : V \to V^{**},\ v \mapsto v^{**} \quad \text{mit } v^{**}(f) = f(v)$$
$$v \in V,\ v^{**} \in V^{**},\ f \in V^*$$

Damit ist φ eine natürl. Transform. vom Id-Funktor $I : K\text{-mod} \to K\text{-mod}$ zum Doppeldualfunktor $^{**} : K\text{-mod} \to K\text{-mod}$.

Bem: In LA zeigt man für endl. dim VR $V \simeq V^*$ (aus Dim. gründen.) Aber dieser Isom. ist nicht natürl., sondern hängt von der Wahl der Basis ab.

(ii) Betrachte den Abel. funktor $Ab : Grp \to Ab$, $G \mapsto G/[G,G]$
$f \mapsto \bar{f} ; G/_{G'} \mapsto H/_{H'}$. Als Funktor $Grp \to Grp$

betrachtet erhält man eine natürl. Transform auf den Id-Funktor von $\mathcal{G}rp$ durch $\varphi_G : G \to G/G'$.

Dann kommutiert

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi_G"'] & H \arrow[d, "\varphi_H"] \\ G/G' \arrow[r, "\bar{f}"'] & H/H' \end{tikzcd}$$

<u>Wichtiges Beispiel</u>: Die Hom-Funktoren:

Def. $\mathrm{Hom}: \mathcal{C}^{op} \times \mathcal{C} \to \mathcal{M}ng$, $(A, B) \longmapsto \hom(A, B)$

und $(f, g) : (A, B) \to (A', B')$ wird abgebildet auf

$\hom(f, g) : \hom(A, B) \to \hom(A', B')$, $\hom(f, g)k = gkf$.

Dieses def. einen Funktor:

zB gilt für $f : A' \to A$, $g : B \to B'$, $k : A \to B$

$gkf : A' \to B'$ und ist $(f', g') : (A', B') \to (A'', B'')$

dann ist $(f', g')(f, g) = (ff', g'g)$ und

$\hom(ff', g'g)(k) = (g'g)k(ff') = \hom(f', g')[\hom(f, g)(k)]$.

Für festes $A \in \mathrm{ob}\,\mathcal{C}$ ist $\hom(A, -) : \mathcal{C} \to \mathcal{M}ng$ ein kovar. Fkt

mit $\hom(A, -)B = \hom(A, B)$ und für $g : B \to B'$

ist $\hom(A, -)g : \hom(A, B) \to \hom(A, B')$

$k \longmapsto gk$.

Entsprechend erhält man einen kontravar. Funktor

$\hom(-, B) : \mathcal{C} \to \mathcal{M}ng$, $\hom(-, B)A = \hom(A, B)$

und $\hom(-, B)f : \hom(A, B) \to \hom(A', B)$, $k \mapsto k \circ f$

für $f \in \hom(A', A)$, $k \in \hom(A, B)$.

Yonedas Lemma: 1.9 Sei $F : \mathcal{C} \to Mng$ ein Funktor, $A \in ob\,\mathcal{C}$, $a \in FA$. Für $B \in ob\,\mathcal{C}$ sei

$$a_B : hom_{\mathcal{C}}(A,B) \to FB, \quad k \mapsto F(k)(a).$$

Dann ist $\eta_a : B \mapsto a_B$ eine natürl. Transform. von $hom_{\mathcal{C}}(A,-)$ nach F.

Darüberhinaus ist $a \mapsto \eta(a)$ eine Bijektion der Menge FA mit der Menge der natürl. Transform. von $hom_{\mathcal{C}}(A,-)$ nach F. Die zu $a \mapsto \eta(a)$ inverse Funktion ist die Abb. $\eta \mapsto \eta_A(1_A) \in FA$.

Bew Ü1.

Skizze: $F : \mathcal{C} \to Mng, \quad A \in ob\,\mathcal{C}$

$$hom_{\mathcal{C}}(A,-) : \mathcal{C} \to Mng.$$

Natürl. Transf: $B \in ob\,\mathcal{C} \mapsto \varphi_B = a_B \in \cancel{hom(FB, hom(A,B))}$
$\in hom(hom(A,B), FB)$

$$a_B : k \in hom(A,B) \mapsto F(k)(a)$$

für $a \in FA$.

Damit gilt dann

$$\begin{tikzcd}
hom_{\mathcal{C}}(A,B) \arrow[r] \arrow[d, "a_B"'] & hom(A,C) \arrow[d, "a_C"] \\
F(B) \arrow[r] & F(C)
\end{tikzcd}$$

Entsprechend gibt die kontravar. Version.

<u>Def 1.10</u> Ein Funktor $F: \mathcal{C} \to \mathrm{Mng}$ heißt repräsentierbar, falls es einen natürl. Isom. von F zu einem Funktor $\hom(A, \_)$ für ein $A \in \mathrm{ob}\,\mathcal{C}$ gibt.

Ist φ dieser natürl. Isom., dann ist φ nach Yonedas Lemma bestimmt durch A und $a = \varphi_A(1_A) \in FA$.

Das Paar (A, a) heißt dann auch Repräsentant für diesen natürl. Isom.

<u>Bsp</u>: $H^1: \mathrm{Top} \to \mathrm{Ab}$, $X \mapsto H^1(X, \mathbb{Z})$ ist kontravar. und wird repräs. durch Homotopieklassen von Abb. $X \to S^1$

<u>Def</u>. 1.11. (Produkte und Koprodukte) Sei $\mathcal{C}$ eine Kat. $\{A_i \mid i \in I\}$ Familie in $\mathrm{ob}\,\mathcal{C}$.

(i) Das <u>Produkt</u> $\prod A_i$ der A_i ist gegeben durch eine Menge $\{A, p_i \mid i \in I\}$ mit $A \in \mathrm{ob}\,\mathcal{C}$, $p_i \in \hom_{\mathcal{C}}(A, A_i)$ so, dass für alle $B \in \mathrm{ob}\,\mathcal{C}$, $f_i \in \hom(B, A_i)$, $i \in I$, ein eind. $f \in \hom(B, A)$ ex derart dass das folgende Diagramm für alle $i \in I$ kommutiert

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f_i"'] & A \arrow[d, "p_i"] \\ & A_i \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "g"] & B \\ A_i \arrow[u, "j_i"] \arrow[ur, "g_i"'] & \end{tikzcd}$$

(ii) Das <u>Koprodukt</u> $\coprod A_i$ ist gegeben durch eine Menge $\{A, j_i \mid i \in A\}$, mit $A \in \mathrm{ob}\,\mathcal{C}$, $j_i \in \hom_{\mathcal{C}}(A_i, A)$ derart dass für alle $B \in \mathrm{ob}\,\mathcal{C}$, $g_i \in \hom_{\mathcal{C}}(A_i, A)$, $i \in I$ ein eind. $g \in \hom(A, B)$ ex, so dass das Diagramm für alle $i \in I$ kommutiert

Bem (i) Wenn (Ko-) Produkte ex., dann folgt aus ihrer univers. Eigenschaft, dass diese eind. bis auf Isom. sind.

In Mng ex Prod (kartes. Prod.) und Koprod. (disj. Vereinigung), ebenso für Grp, Rng, aber zB <u>nicht</u> in der Kat. der endl. Grp.

Für Ab sind Prod = dir Prod., Koprod = dir Summen

(ii) Das (Ko-) Prod. über eine leere Familie ist final (bzw initial).

Def 1.12 (Univ. Obj.) Seien $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ Kat., $F: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ein Funktor, $B \in \operatorname{ob} \mathcal{D}$. Ein univers. Paar für B und F ist gegeben durch ein univ. Obj. $U_B \in \operatorname{ob} \mathcal{C}$ und einen univ. Morphismus $u_B \in \hom_{\mathcal{D}}(B, FU_B)$, so dass für alle $A \in \operatorname{ob} \mathcal{C}$, $g \in \hom_{\mathcal{D}}(B, FA)$ ein eind. $\bar{g} \in \hom_{\mathcal{C}}(U_B, A)$ ex mit

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "u_B"] \arrow[d, "g"'] & FU_B \arrow[dl, "F(\bar{g})"] \\ FA & \end{tikzcd}$$

Bsp (i) Sei $F: \mathrm{Grp} \to \mathrm{Mng}$ der vergessl. Funktor, B Menge. Dann ist U die von B frei erz. Gr. Jede Gr, die B 'enthält', ist Quotient von U.

(ii) $F: R\text{-mod} \to \mathrm{Mng}$, U ist frei erz R-mod über B.

Bem (i) Wenn univ. Obj. ex, sind sie bis auf Isom. eind.

(iii) Man kann Koprod. als univ. Obj begl des Diagonalfunktors $\Delta : \mathcal{C} \longrightarrow \prod_{i\in I} \mathcal{C}$ für $B = (A_i) \in \mathrm{ob} \prod \mathcal{C}$ def.

<u>Def</u> 1.13 Seien $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ Kat., $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ Funktoren. Dann heißt F rechts-adj. zu G (und G links-adj. zu F), wenn für alle $B \in \mathrm{ob}\,\mathcal{D}$, $A \in \mathrm{ob}\,\mathcal{C}$ eine Bij.

$$\varphi_{B,A} : \hom_{\mathcal{C}}(GB, A) \longrightarrow \hom_{\mathcal{D}}(B, FA) \quad \text{ex.}$$

so dass für festes B die Funktoren $\hom_{\mathcal{C}}(GB, \_)$ und $\hom_{\mathcal{D}}(B, F\_)$ natürl. isom. sind via $\varphi_{B,\_}$.

Dann heißen (F, G) oder (F, G, φ) adj. Paar.

<u>Bsp</u>: (i) $F : \mathrm{Grp} \to \mathrm{Mng}$ Vergiss-Funktor. Dann ist

$$\hom_{\mathrm{Grp}}(Fr_X, G) \simeq \hom(X, FG) \qquad (\ddot{U}A)$$

(ii) $J : \mathrm{Ab} \hookrightarrow \mathrm{Grp}$, $\mathrm{Ab} : \mathrm{Grp} \to \mathrm{Ab}$ Abelianis.

Dann ist $\hom_{\mathrm{Ab}}(G/_{G'}, A) \simeq \hom_{\mathrm{Grp}}(G, JA)$.

<u>Bem</u> 1.14 (i) F und G bestimmen sich gegenseitig bis auf Isom. Das zeigen wir später in add. Kat., es gilt aber immer.

(ii) Ist (F, G, φ) ein adj. Paar, $B \in \mathrm{ob}\,\mathcal{D}$, setze

$$u_B = \varphi_{B,GB}(1_{GB}) \in \hom_{\mathcal{D}}(B, FGB). \text{ Dann ist}$$

$$\varphi_B : \hom_{\mathcal{C}}(GB, \_) \longrightarrow \hom_{\mathcal{D}}(B, F\_) \text{ ein natürl. Isom.}$$

Nach Yonedas Lemma gilt für $f \in \hom_{\mathcal{C}}(GB, A)$

$$\varphi_{B,A}(f) = \hom_{\mathcal{D}}(B, F(f))_{u_B} = F(f)\, u_B,$$

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "u_B"] \arrow[d, "F(f)u_B"'] & FGB \arrow[dl, "F(f)"] \\ FA & \end{tikzcd} \qquad f \in \hom_{\mathcal{C}}(GB, A)$$

d.h. $f \mapsto F(f)u_B$ ist eine Bij

$$\hom_{\mathcal{C}}(GB, A) \to \hom_{\mathcal{D}}(B, FA).$$

Weil das für alle A gilt, ist (GB, u_B) univ. für B, G.

(iii) Umgekehrt bestimmt man aus den univ. Obj für einen Funktor F den zugeh. adj. Funktor, nämlich

$$GB = U_B.$$

Additive und abelsche Kategorien

<u>Def</u> 1.15 Eine Kat. $\mathcal{C}$ heißt <u>additiv</u>, falls gilt:

(i) für alle $A, B \in \operatorname{ob} \mathcal{C}$ bildet $\hom(A, B)$ ab. Gr. (bzgl. +)

(ii) für alle $A, B, C \in \operatorname{ob} \mathcal{C}$, $f_1, f_2, f \in \hom(A, B)$, $g_1, g_2, g \in \hom(B, C)$

gilt $f(g_1 + g_2) = fg_1 + fg_2$

$(f_1 + f_2)g = f_1 g + f_2 g$, d.h. Kompos. ist biadd.

(iii) jede <u>endl</u>. Familie hat Produkt (und Koprod.)

(iv) $\hom(A, A)$ ist Ring.

<u>Bem</u> (i) Diese Def ist selbstdual, d.h. $\mathcal{C}$ add. $\Rightarrow \mathcal{C}^{op}$ add.

(ii) Gr.str. auf $\hom(A, B)$ ist eind., $0 \in \hom(A, B)$ sehen wir unten.

(iii) Es genügt, Prod. <u>oder</u> Koprod. vorauszusetzen.

Für leere Familien erhält man finale und init. Obj.

<u>Bsp</u>: R-mod ist add., Mng, Rng, Grp sind <u>nicht</u> add.

Dies folgt aus:

<u>Satz 1.16</u> Sei $\mathcal{C}$ add. Kat., $(A_i)_{i \in I}$ endl. Fam. in $\operatorname{ob} \mathcal{C}$.

Für $B \in \operatorname{ob} \mathcal{C}$, $p_i : B \to A_i$, $j_i : A_i \to B$ mit $p_i j_i = \delta_{ij} 1_{A_i}$

sind äquiv:

(i) (B, p_i) ist Prod. der $(A_i)_{i\in I}$.

(ii) (B, j_i) ist Koprod. der $(A_i)_{i\in I}$.

(iii) (B, p_i, j_i) ist Biprod. der (A_i), d.h. es gilt zusätzlich $\sum_i j_i p_i = 1_B$

Bew: (i) ⇒ (iii) Ist (B, p_i) Produkt, setze $\varphi = \sum_i j_i p_i \in \hom(B,B)$

Dann ist $p_i \varphi = p_i \sum_i j_k p_k = \sum_i p_i j_k p_k = p_i$.

Aus der Eind.keit folgt $\varphi = 1_B$, d.h. B ist Biprod.

(iii) ⇒ (i) Für $f_i : A \to \cancel{A}_i$ def $f = \sum_i j_i f_i : A \to B$.

Dann ist $p_i f = \sum_i p_i j_i f_i = f_i$, d.h. (B, p_i) ist Produkt.

Aus der Selbstdualität des Begriffs einer add. Kat. folgt daher auch (iii) ⇔ (ii)

Kor. 1.17 (i) In add. Kat. sind Prod. und Koprod. von endl. Familien isom. Insbesondere ex 0-Obj, d.h. Obj, die gleichz. final und initial sind.

Es ist $0 \in \hom(A, B)$ der Morph. gf mit $f \in \hom(A, 0)$
$g \in \hom(0, B)$

(ii) Mng, Grp, Rng sind keine add. Kat.

Achtung: Prod = Koprod. nur für endl. Familien.

Def. 1.18 Sei $\mathcal{C}$ eine Kat. mit 0-Obj, $f \in \hom_{\mathcal{C}}(A, B)$.

(i) Dann heißt $k \in \hom(K, A)$ ein Kern von f, ker f, falls k mono, $fk = 0$ und für alle $g : G \to A$ mit $fg = 0 \in \hom(G, B)$ ex $g' \in \hom(G, K)$ mit $g = kg'$.
(da k mono, ist g' eind.)

(ii) Es heißt $c \in \hom(B,C)$ ein Kokern von f, falls c epi, $cf=0$ und für alle $h: B \to H$ mit $hf=0$ ex $h': C \to H$ mit $h = h'c$ (und h' ist eind., da c epi.)

$$\begin{tikzcd} G \arrow[d, dashed, "g'"'] \arrow[dr, "g"] & & \\ K \arrow[r, "k"] & A \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r, "c"] \arrow[dr, "h"'] & C \arrow[d, dashed, "h'"] \\ & & H \end{tikzcd}$$

<u>Bsp</u>: $\mathcal{C} = R$-mod, $f: A \to B$, $K = \ker f$.

$k: K \hookrightarrow A$. Dann ist k mono, $fk=0$ und ist $g: G \to A$ mit $fg=0$, dann ist $gG \subseteq K$. Für $g = g': G \to K$ ist $g = kg'$, d.h. $k = \ker f$.

Für den Kokern setze $C = B/f(A)$, $c: B \to C$ die kanon. Proj. Dann ist c epi, $cf=0$ und falls $h: B \to H$ mit $hf=0$, ist $fA \subseteq \ker h$. Dann ex eind. $h': C \to H$ mit $h'c = h$, d.h. c ist Kokern von f.

<u>Bem</u>: Offens. sind Kern und Kokern bis auf Isom. eind., falls sie ex. (setze $g=k$, bzw $h=c$)

<u>Def</u> 1.19. Eine add. Kategorie heißt abelsch, wenn sie folgende Bedingungen erfüllt:

(iv) Jeder Morph. hat Kern und Kokern.

(v) Jeder Monom. ist Kern seines Kokerns und jeder Epimorph. Kokern seines Kerns.

(vi) Jeder Morph. hat (eind.) Faktoris. $f = me$ mit e epi, m mono.

<u>Bsp:</u> R-mod ist ab. Kat.

Offens. gilt: $\mathcal{C}$ ab. $\Rightarrow$ $\mathcal{C}^{op}$ ab.

<u>Lemma 1.20</u> Sei $\mathcal{C}$ ab. Kat. Dann gilt:

(i) f ist mono $\Leftrightarrow$ $\ker f = 0$

(ii) f epi $\Leftrightarrow$ $\operatorname{coker} f = 0$.

<u>Bew:</u> Es genügt (i) z.z.

Ist f mono, dann ist $f \ker f = f0 = 0$, also $\ker f = 0$.

Ist $\ker f = 0$, $fg_1 = fg_2$, dann ist $f(g_1 - g_2) = 0$ und es ex. eind. g' mit $g_1 - g_2 = 0 \cdot g' = 0$, d.h. $g_1 = g_2$ und daher f mono

<u>Lemma 1.21</u> Ist g epi, $\ker fg = \ker g$, dann ist f mono.

<u>Bew:</u> Sei $f = em$, e epi, m mono. Dann ist $fg = emg$.

Sei $k = \ker mg = \ker emg = \ker fg = \ker g$.

Nach (0) sind dann g und mg coker von k und es ex. Isom h mit $hg = mg$. Weil g epi ist, folgt $h = m$, d.h. m ist Isom. und daher f mono.

<u>Satz 1.22</u> Sei $\mathcal{C}$ ab. Kat., $f: A \to B$. Dann ~~ex~~ ex. eine (bis auf Isom. eind.) Folge

$$0 \to K \xrightarrow{k} A \xrightarrow{e} I \xrightarrow{m} B \xrightarrow{c} C \to 0$$

mit $f = me$, $k = \ker f$, $c = \operatorname{coker} f$, $e = \operatorname{coker} k$, $m = \ker c$.

(Eine solche Folge heißt <u>exakt</u>.)

<u>Bew:</u> Sei $k = \ker f$, $c = \operatorname{coker} f$. Dann ist $fc = 0$. und $f = me$.