Algebra III

Plan: Kategorien + Funktoren
Homologische Algebra
Kategorie der R-Moduln
Komplexe, derivierte Funktoren
Homologiegruppen
Kohomologie von Gruppen
→ Galois-Kohomologie
und Brauergruppen
bewertete Körper

Literatur: Jacobsen BA II
S. Lang Algebra
P.M. Cohn Basic Algebra
Further Algebra
Hilton-Stammbach Homological Algebra
Ch. Weibel: Introduction to homol. algebra
Ken Brown: Kohomology of gps
J.-P. Serre: Corps locaux
Galois cohomology

§1. Kategorien + Funktoren

Def 1.1 Eine Kategorie $\mathcal{C}$ besteht aus

1. einer Klasse ob$\mathcal{C}$ von Objekten, $A, B, C, \in$
2. für jedes geordnete Paar (A,B) von Obj. ob$\mathcal{C}$. eine Menge $\hom_{\mathcal{C}}(A,B)$ von Morphismen von A nach B.
3. Für jedes geordnete Tripel (A,B,C) von Obj. eine Abb. $\circ : \hom(A,B) \times \hom(B,C) \to \hom(A,C)$
$$(f,g) \longmapsto g \circ f \quad (= gf).$$

Wir setzen immer voraus, dass folgendes gilt:

C1: Falls $(A,B) \neq (C,D)$, dann ist $\hom(A,B) \cap \hom(C,D) = \emptyset$

C2. (Assoz.) Für $f \in \hom(A,B)$, $g \in \hom(B,C)$, $h \in \hom(C,D)$ gilt $(hg)f = h(gf)$ $(= hgf)$.

C3. (Einh.) Für jedes Obj. A ex. eind. $1_A \in \hom(A,A)$ mit $f\,1_A = f$ für jedes $f \in \hom(A,B)$ und $1_A\, g = g$ $\qquad g \in \hom(B,A)$.

Wie üblich schreiben wir auch $f : A \to B$ für $f \in \hom(A,B)$

Bsp: (i) Mng: Obj sind alle Mengen (Klasse) Morphismen sind Abb.

(ii) Grp: Kategorie der Gr., Morph. sind Gr. hom.

(iii) Ab: Kategorie der ab. Gr. etc.

Unterkategorie: $\mathcal{D}$ von $\mathcal{C}$ heißt das $\operatorname{Ob} \mathcal{D}$ Teilklasse von $\operatorname{ob} \mathcal{C}$, $\hom_{\mathcal{D}}(A,B) \subset \hom_{\mathcal{C}}(A,B)$

Eine Kategorie heißt <u>klein</u>, falls $\operatorname{ob} \mathcal{C}$ Menge ist, z.B. Kateg. der endl. Gr., der endl. dim K-VR etc.

<u>Def</u> 1.2. Ein $f \in \hom(A,B)$ heißt Isomorphismus, falls ein $g \in \hom(B,A)$ ex. mit $fg = 1_B$ und $gf = 1_A$.

Dann ist g eind. durch f bestimmt, daher $g = f^{-1}$.

Dann ist offens. auch f^{-1} Isom. und $(f^{-1})^{-1} = f$.

Ein <u>Gruppoid</u> ist eine (kleine) Kategorie, in der jeder Morphism. ein Isom. ist.

<u>Bem</u>: Sind g, f Isom, fg def., dann ist auch fg Isom mit $(fg)^{-1} = g^{-1} f^{-1}$.

<u>Bsp</u>: Für Mng sind Isom. genau die Bij., für Grp genau Gr.-Isom

(iv) R-mod: Kateg. der Links-R-Moduln über festem Ring R. Speziell: K-mod $= VR_K$.

(v) Top: Kateg. der topol. Räume, stetige Abb. als Morphismen.

<u>Wichtige Konstruktionen</u>: (i) Ist $\mathcal{C}$ eine Kat., dann ist auch $\mathcal{C}^{op}$ Kat. mit $\operatorname{ob} \mathcal{C}^{op} = \operatorname{ob} \mathcal{C}$ und für $A, B \in \mathcal{C}^{op}$ ist $\hom_{\mathcal{C}^{op}}(A,B) = \hom_{\mathcal{C}}(B,A)$. Für $f \in \hom_{\mathcal{C}^{op}}(A,B)$, $g \in \hom_{\mathcal{C}^{op}}(B,C)$ ist dann $g \circ^{op} f = f \circ g$ in $\mathcal{C}$.

Es ist natürl. $1_A^{op} = 1_A$. $\mathcal{C}^{op}$ heißt <u>duale</u> Kat.

(ii) Sind $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ Kateg., dann ist die Produkt-Kat. $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ wie folgt def.: $\mathrm{ob}(\mathcal{C} \times \mathcal{D}) = \mathrm{ob}\,\mathcal{C} \times \mathrm{ob}\,\mathcal{D}$.
Für $A, B \in \mathrm{ob}\,\mathcal{C}$, $A', B' \in \mathrm{ob}\,\mathcal{D}$ setze

$$\hom_{\mathcal{C} \times \mathcal{D}}((A, A'), (B, B')) = \hom_{\mathcal{C}}(A, B) \times \hom_{\mathcal{D}}(A', B')$$

und $1_{(A,A')} = 1_A \times 1_{A'}$. Für $f \in \hom_{\mathcal{C}}(A, B)$, $g \in \hom_{\mathcal{C}}(B, C)$, $f' \in \hom_{\mathcal{D}}(A', B')$, $g' \in \hom_{\mathcal{D}}(B', C')$ ist $(g, g')(f, f') = (gf, g'f')$.
Es ist leicht zu sehen, dass beides wieder Kat. sind.

<u>Def</u> 1.3 Sei $\mathcal{C}$ eine Kat. Ein Morph. $f: A \to B$ heißt <u>mono</u> (bzw <u>epi</u>), falls er links- (bzw rechts-) kürzbar ist, d.h. falls für beliebige C und $g_1, g_2 \in \hom(C, A)$ (bzw $\hom(B, C)$) gilt:

$$f g_1 = f g_2 \quad (\text{bzw } g_1 f = g_2 f) \Rightarrow g_1 = g_2 .$$

<u>Bem</u>: Seien $f: A \to B$, $g: B \to C$ Morph.
(i) Sind f, g mono (bzw epi) dann auch gf.
(ii) Ist gf mono (bzw epi), dann ist f mono (bzw g epi)

<u>Prop</u> 1.4 Für $\mathcal{C} = R$-mod oder $\mathcal{G}rp$ sind Morphismen mono (bzw epi) gdw sie inj (bzw. surj.) sind.

<u>Bew</u> ÜA inj = mono einf., surj = epi nicht.

<u>Achtung</u>: Ein Morph. von Ringen kann <u>epi</u> sein und nicht <u>surj</u>! Sei $\varphi: \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$.

Jedes Ringhomom $f: \mathbb{Q} \to R$ ist durch die Einschr. auf $\mathbb{Z}$ vollst. bestimmt, Daher gilt für $f, g: \mathbb{Q} \to R$ offensichtlich $g\varphi = f\varphi \Rightarrow g = f$, aber φ ist nicht surj.

<u>Def</u> 1.5 Sei $\mathcal{C}$ eine Kat. $A \in ob\,\mathcal{C}$ heißt <u>initial</u> (bzw <u>final</u>), wenn es für jedes $B \in ob\,\mathcal{C}$ genau einen Morphismus $f: A \to B$ (bzw $f: B \to A$) gibt.

<u>Bsp</u>: Mng: $\emptyset$, 1-Elem. Mengen, Grp: triv. Gr.

<u>Bem</u>: Offens. sind initiale und finale Obj, wenn sie ex., bis auf Isom. eind. Ist $A \in ob\,\mathcal{C}$ gleichz. initial und final, dann heißt A 0-Obj.

<u>Def</u> 1.6 Seien $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ Kat. Ein (kovariantes) Funktor $F: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ besteht aus einer Abb; $F: ob\,\mathcal{C} \to ob\,\mathcal{D}$ und einer Abb $F: hom_{\mathcal{C}}(A, B) \to hom_{\mathcal{D}}(F(A), F(B))$ für alle $A, B \in ob\,\mathcal{C}$ $\quad f \mapsto F(f)$
derart dass folgendes gilt:

(i) Ist gf in $\mathcal{C}$ def., dann ist $F(gf) = F(g)F(f)$ und

(ii) $F(1_A) = 1_{F(A)}$.

Ein kontravarianter Funktor von $\mathcal{C}$ nach $\mathcal{D}$ ist ein Funktor von $\mathcal{C}^{op}$ nach $\mathcal{D}$; d.h. der Funktor ist gegeben durch Abb. $ob\,\mathcal{C} \to ob\,\mathcal{D}$, und $hom(A, B) \to hom(FB, FA)$ mit $F(fg) = F(g)F(f)$.

<u>Bsp</u>: (i) Vergessliche Funktoren; z.B Grp $\to$ Mng, Rng $\to$ Ab etc

(ii) R ein Ring, $n \in \mathbb{N}$, $M_n(R)$ Ring der $n \times n$-Matr. über R. Damit erhalten wir einen Funktor

$M_n : Rng \to Rng$. Jeder Ringhomom. $f: R \to S$ setzt sich fort auf $M_n(R) \to M_n(S)$.

(iii) Seien R-mod, mod-R Kat. der Rechts- bzw Links-R-Moduln. Ist $M \in R$-mod sei $M^* = \hom_R(M,R)$.

Für $f, g \in M^*$, $s \in R$ sei $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$

$(f \cdot s)(x) = f(x) \cdot s$,

d.h. $M^* \in$ mod-R.

Ist $\varphi \in$ ~~...~~ $\hom_R(M,N)$, dann ist

$\varphi^* : N^* \to M^*$ def. durch $\varphi^*(g) = g \circ \varphi$

Ist dann $M_1 \xrightarrow{\varphi_1} M_2 \xrightarrow{\varphi_2} M_3$, φ_i in R-mod und

$g \in M_3^*$, dann ist $(\varphi_2\varphi_1)^*(g) = g\,\varphi_2\varphi_1 = \varphi_1^*\varphi_2^*(g)$.

Es ist klar, dass $1_M^* = 1_{M^*}$, d.h.

$D : R\text{-mod} \to \text{mod}R$, $M \mapsto M^*$, $\varphi \mapsto \varphi^*$

ist ein kontravarianter Funktor, der Dualitätsfunktor von R-mod zu mod$R$.

<u>Def</u> 1.7 Ein Funktor $F: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ heißt treu (bzw voll), wenn für alle $A, B \in ob\,\mathcal{C}$ die Abb $\hom_{\mathcal{C}}(A,B) \to \hom_{\mathcal{D}}(FA,FB)$ inj. (bzw surj.) ist.

<u>Bsp</u> (i) + (ii) sind treu, aber nicht voll.

Abel: $Grp \to Ab$, $G \mapsto G/[G,G]$ ist nicht treu