

Wegen  $m = \ker c$  ist  $m$  mono und  $mc = 0$ . Daher  
 ex  $e'$  mit  $f = me'$ . Entsprechend finden wir  
 $f = m'e$  mit  $e$  epi. Nach Lemma 20 ist wegen  
 $mc = 0$  auch  $e'$  epi. Dann ist  $\ker f = \ker e = \ker e'$ ,  
 also  $e' = he$  für einen Isom  $h$ . Daher ist  
 $m' = m \circ h$ , und die Zerlegung eindeutig.

Kor. 23 Ist  $\mathcal{C}$  ab. Kat., dann ist  $f$  Isom gdw  $f$  mono und epi.

Bew: " $\Rightarrow$ " gilt in allen Kat.

" $\Leftarrow$ " Schreibe  $f = 1 \cdot f = f \cdot 1$ . Wegen der Eind. in Satz 22  
 ist  $f$  Isom.

Achtung: " $\Leftarrow$ " gilt nicht in bel. Kat.

z.B.  $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$  ist mono und epi in  $\text{Rng}$ , aber kein Isom.

Def 0.24  $\mathcal{C}, \mathcal{D}$  add. Kat. Dann heißt ein Funktor  
 $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  add., falls für alle  $A, B \in \text{ob } \mathcal{C}$  die induz.

Abb.  $\text{hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \rightarrow \text{hom}_{\mathcal{D}}(FA, FB)$  ein Gr.hom. ist.

Bsp: Ist  $\mathcal{C}$  add., dann sind  $\text{hom}(A, -)$  und  $\text{hom}(-, B)$   
 add. Funktoren von  $\mathcal{C}$  nach  $\text{Ab}$ .

Im Folgenden: werden wir immer voraussetzen, dass  
 Funktoren auf ab. Kateg. add. sind!

Bem: Funktoren zwischen add. Kateg. sind genau dann  
 add., wenn sie (Ko-)Produkte erhalten.

Notation: Schreibe  $\text{im } \alpha = \ker \text{coker } \alpha$   
 $\text{coim } \alpha = \text{coker } \ker \alpha$ .

Also  $\alpha = \text{im } \alpha$ , falls  $\alpha$  mono,  $\alpha = \text{coim } \alpha$ , falls  $\alpha$  epi.

Def 0.25 (Komplexe in einem ab. Kat.  $\mathcal{L}$ )

- 17 -

Eine Folge  $\dots \rightarrow A_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} A_n \xrightarrow{f_n} A_{n+1} \rightarrow \dots$

von Obj. und Morph. in  $\mathcal{L}$  heißt Komplex, falls  $f_n \circ f_{n-1} = 0$  für alle  $n$ . Ist im  $f_{n-1} = \ker f_n$ , dann heißt die Folge exakt an der Stelle  $A_n$ , und exakt, falls das für alle  $n$  gilt.

Bsp Für ex. Sequenzen:

(i)  $0 \rightarrow A \rightarrow 0$  ex.  $\Leftrightarrow A = 0$

(ii)  $0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \rightarrow 0$  ex.  $\Leftrightarrow f$  Isom. (in ab. Kat!)

(iii)  $0 \rightarrow A_1 \xrightarrow{f_1} A_2 \xrightarrow{f_2} A_3 \rightarrow 0$  heißt

kurze ex. Seq. Dann ist  $f_1$  mono,  $f_2$  epi.

Ein Funktor  $F: \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{D}$  heißt ex., wenn das Bild einer ex. Seq wieder ex. ist:

$\dots \rightarrow A_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} A_n \xrightarrow{f_n} A_{n+1} \rightarrow \dots$

$\dots \rightarrow F A_{n-1} \xrightarrow{F f_{n-1}} F A_n \xrightarrow{F f_n} F A_{n+1} \rightarrow \dots$

Ein Funktor  $F$  heißt links exakt (bzw rechts exakt), falls aus der Exaktheit von

$0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C$  (bzw  $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ )

die Ex. von

$0 \rightarrow F A \rightarrow F B \rightarrow F C$  (bzw  $F A \rightarrow F B \rightarrow F C \rightarrow 0$ )

folgt.

Satz 0.26 Ist  $\mathcal{L}$  ab. Kat.,  $A \in \text{ob } \mathcal{L}$ , dann sind die

Funktoren  $\text{hom}(A, -)$  (und der kontrav. Funktor

$\text{hom}(-, A)$ ) links ex.

Bew. Sei  $0 \rightarrow B \xrightarrow{f} C \xrightarrow{g} D$  ex., d.h.  $f$  mono,  $-18-$   
 $\text{im } f = \ker g$ . z.z. ist

$$0 \rightarrow \text{hom}(A, B) \xrightarrow{\text{hom}(A, -)f} \text{hom}(A, C) \xrightarrow{\text{hom}(A, -)g} \text{hom}(A, D)$$

ist ex. Zeige:  $\text{hom}(A, -)f$  ist mono. Ist  $\varphi \in \text{hom}(A, B)$   
mit  $\text{hom}(A, -)f(\varphi) = f\varphi = 0$ , dann ist  $\varphi = 0$ , da  $f$  mono.

Wird  $\text{hom}(A, -)f$  ein Isom. ist, folgt  $\text{hom}(A, -)f$  mono.

Wegen  $gf = 0$  folgt für alle  $\varphi \in \text{hom}(A, B)$  auch

$$0 = g f \varphi = \text{hom}(A, -)g [\text{hom}(A, -)f] \varphi, \text{ also}$$

$$\text{hom}(A, -)g \text{ hom}(A, -)f = 0, \text{ d.h. } \text{im } f^* \subseteq \ker g^*.$$

Ist umgekehrt  $\varphi \in \ker(\text{hom}(A, -)g)$ , d.h.  $\varphi \in \text{hom}(A, C)$  mit  
 $g\varphi = 0$ , dann ex.  $\psi \in \text{hom}(A, B)$  mit  $\varphi = f\psi$ , da  $f = \ker g$ ;  
d.h.  $\varphi \in \text{im } f = \ker \text{coker } f$ .

Der Beweis für den kontrav. Funktor  $\text{hom}(-, A)$  geht  
entsprechend. Dabei wird eine ~~Rechts~~ ex. Sequenz in  
eine ~~links~~ ex. Sequenz überführt.  $\square$

Wir definieren noch eine allgemeinere Form von (Ko-)Prod.

Funktorkategorie: Ist  $\mathcal{C}$  eine ab. Kat.,  $\mathcal{D}$  eine kleine  
Kat., dann betrachte  $\mathcal{C}^{\mathcal{D}}$  als Kat., deren Obj die  
Funktionen von  $\mathcal{D}$  nach  $\mathcal{C}$  sind mit natürl. Transform.  
als Morphismen.

Spezialfall: Ist  $\mathcal{D} = I$  eine partiell geordnete Menge, dann  
sind die Obj. von  $\mathcal{C}^I$  von der Form  $(A_i, \kappa_{ij})_{i \in I}$  mit  
 $A_i \in \text{ob } \mathcal{C}$  und  $\mathcal{C}$ -Morph.  $\kappa_{ij}: A_i \rightarrow A_j$  für  $i \leq j$ ,

desart dass  $\alpha_{ii} = 1$  und  $\alpha_{jk} \alpha_{ij} = \alpha_{ik}$  für  $i \leq j \leq k$ .

Man sagt die  $\alpha_{ij}$  sind kohärent.

Ein Morph.  $f: (A_i, \alpha_{ij}) \rightarrow (B_i, \beta_{ij})$  ist gegeben durch

Abb  $f_i: A_i \rightarrow B_i$  mit  $f_j \alpha_{ij} = \beta_{ij} f_i$  für  $i \leq j$ .

Der Diagonalfunktor  $\Delta: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}^{\mathbb{J}}$  ist gegeben durch

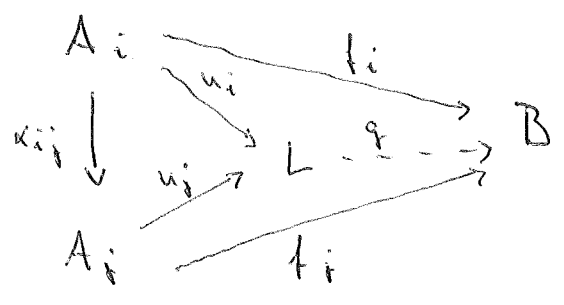
$$\Delta A = (A_i, \alpha_{ij}) \text{ mit } A_i = A, \alpha_{ij} = 1_A \text{ für alle } i \leq j.$$

Wir def. nun den direkten (oder induktiven) Limes als links-adj. Funktor von  $\Delta$ . D.h

Def 1.27  $L \in \text{ob } \mathcal{C}$  heißt Kolimes (oder dir. Limes) von  $(A_i, \alpha_{ij})$ ,  $L = \varinjlim (A_i, \alpha_{ij})$ , wenn es Morph.

$u_i: A_i \rightarrow L$  gibt mit  $u_i = u_j \alpha_{ij}$  und desart,

dass für jede Abb  $(f_i)_{i \in \mathbb{J}} \in \text{hom}_{\mathcal{C}}((A_i, \alpha_{ij}), \Delta B)$  ein eind.  $g: L \rightarrow B$  ex. mit  $f_i = g u_i$ .



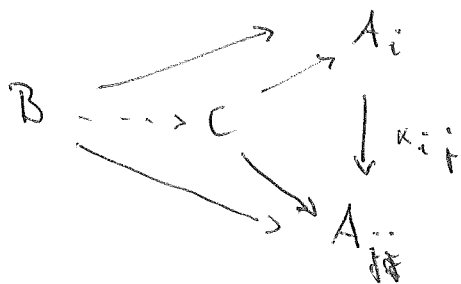
Bem: (i) Offens. sind Kolimiten bis auf Isom eind., falls sie ex. Dann gilt

$$\text{hom}_{\mathcal{C}}(L, B) \cong \text{hom}_{\mathcal{C}^{\mathbb{J}}}((A_i, \alpha_{ij}), \Delta B),$$

d.h.  $\varinjlim$  ist links-adj. Funktor zu  $\Delta$ .

(ii) Entsprechend wird der proj. Limes def. als rechts adj. Funktor zu  $\Delta$ , d.h. wir haben

$$C = \varprojlim (A_i, \alpha_{ij}) \text{ mit}$$



Spezialfälle: Ist  $I$  ungeordnet, dann ist

$$\varinjlim A_i = \coprod A_i, \quad \varprojlim A_i = \prod A_i.$$

Für ein Tripel  $I = \{i, j, k\}$ ,  $i, j < k$  heißt

$$\begin{array}{l}
 \varinjlim A_i \quad \text{pushout} \quad k < i, j \\
 \varprojlim A_i \quad \text{pull-back} \quad \text{des } A_i
 \end{array}$$

Bem: Push-out und Pullbacks ex. in ab. Kat.  
(später)

Bsp: (i) Sei  $K$  Körper,  $(E_i)$  die Familie aller endl.

Körpererweiterungen von  $K$  mit Inklusionen als Abb. Dies bildet eine gerichtete Familie, d.h. für alle  $i, j \in k$  mit  $i, j \leq k$ .  
Der Kolim. des  $(E_i)$  ist alg. über  $K$  und alg. abg., also genau der alg. Abschluss von  $K$ .

(ii) Sei  $F$  freie Gr. von  $\text{Rang} > 1$ ,  $(N_i)$  die Fam.

aller NT von endl. Index in  $F$ . Dann sind alle  $G_i = F/N_i$  endl. Gr. und für  $N_i \leq N_j$  ex. natürl.

Homom.  $\varphi_{ij}: G_i \rightarrow G_j$ , die ein kohärentes System bilden. Mit  $N_i, N_j$  hat auch  $N_i \cap N_j$  endl. Index in  $F$  und wir können den proj. Limes  $G = \varprojlim G_i$  bilden.

Solche Gr. heißen profin, d.h. proj. Limes endl. Gr.

Da die natürl. Homom.  $F \rightarrow G_i$  mit den  $\varphi_{ij}$  kompat.

sind, ex. ein natürl. Homom.  $\rho: F \rightarrow G$ .

(Wegen  $\bigcap N_i = 1$  ist  $\rho$  inj., aber nicht surj., da  $F$  abz.,  $G$  überabz.)

(ii)' + (i)'. Nimmt man in (i) einen Körper  $K$  der char 0 und für  $(E_i)$  sämtliche endl. Galoisgr. von  $K$ , dann ist der Kolim. der  $E_i$  wieder der alg. Abschluss von  $K$ .

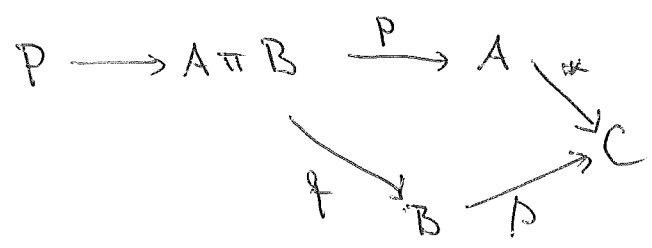
Der proj. Limes der zugeh. Galoisgr. ist eine profinite Gr., die abs. Galoisgr. von  $K$ , d.h.  $\text{Gal}(K^{\text{alg}}/K)$ .

Lemma 1.28 In ab. Kat. ex. Pull-backs und Push-out

Bew: Seien  $\alpha: A \rightarrow C, \beta: B \rightarrow C$  gegeben.

$$p: A \times B \rightarrow A, \quad q: A \times B \rightarrow B.$$

Dann ist  $P = \ker(\alpha p - \beta q)$  der Pull-back

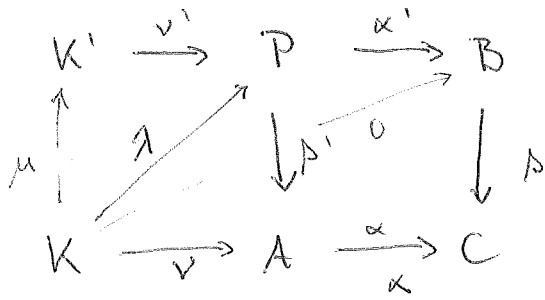


Dies folgt sofort aus der univ. Eigenschaft des Produkts. (UA)

Lemma 1.29 Ist  $\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\alpha'} & B \\ \beta' \downarrow & & \downarrow \beta \\ A & \xrightarrow{\alpha} & C \end{array}$  ein Pull-back, dann ist  $\ker \alpha \cong \ker \alpha'$

Insbesondere ist  $\alpha$  mono  $\Leftrightarrow \alpha'$  mono.

Bew: Sei  $K', v' = \ker \alpha', K, v$  mit  $\alpha v = 0$



Dann macht  $K \xrightarrow{0} B$  das Diagramm kommutativ.

Dabei ex. sind  $\gamma: K \rightarrow P$  mit  $\alpha' \gamma = 0, \beta' \gamma = v$ , denn  $P$  ist Pull-back. Wegen  $v' = \ker \alpha'$  ex. sind

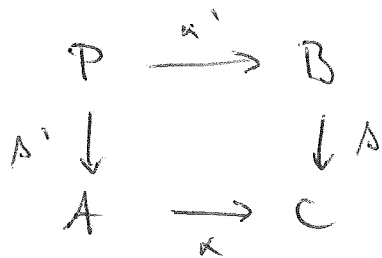
$\mu: K \rightarrow K'$  mit  $\gamma = v' \mu$ , also  $v = \beta' v' \mu$ , d.h.

$\beta' v': K' \rightarrow A$  ist  $\ker$  von  $\alpha$

(Setze  $K = K', v = \beta' v' \mu$ . Dann ist  $\mu = \text{id}$ .)

Lemma 1.30 Sei  $\mathcal{C}$  ab. Kat.,  $p: A \amalg B \rightarrow A$

$q: A \amalg B \rightarrow B$



$$f = \alpha p - \beta q$$

$$P \rightarrow A \amalg B \xrightarrow{f} C$$

Dann gilt:

$$0 \rightarrow P \rightarrow A \amalg B \rightarrow C \text{ ex} \Leftrightarrow P \text{ Pullback}$$

$$P \rightarrow A \amalg B \rightarrow C \rightarrow 0 \text{ ex} \Leftrightarrow C \text{ Pushout}$$

$$0 \rightarrow P \rightarrow A \amalg B \rightarrow C \rightarrow 0 \Leftrightarrow \text{Pullback und}$$

Pushout.

Kor 1.31 Ist  $P \xrightarrow{\alpha'} B$   
 $\downarrow \quad \downarrow \beta$   
 $A \xrightarrow{\alpha} C$

Pullback,  $\alpha: A \rightarrow C$  epi,

dann auch  $\alpha': P \rightarrow B$  epi.

Bew Dual dazu:  $P \xrightarrow{\alpha'} B$  Pushout  
 $\downarrow \quad \downarrow$   $\alpha': P \rightarrow B$  mono  
 $A \xrightarrow{\alpha} C$  dann auch  $\alpha: A \rightarrow C$  mono.

Es ist  $P \rightarrow A \amalg B \rightarrow C \rightarrow 0$  ex und

$P \rightarrow A \amalg B$  mono, weil

$\alpha': P \rightarrow A \amalg B \rightarrow B$  nach Voraus. mono.

Also ist das Diagramm auch Pullback und die Beh. folgt aus Lemma 1.28.

Def 1.32 Sei  $\mathcal{L}$  ab. Kat. Dann heißt  $P \in \text{ob } \mathcal{L}$  proj. falls  $\text{hom}(P, -)$  ex. ist und  $I \in \text{ob } \mathcal{L}$  heißt inj. falls  $\text{hom}(-, I)$  ex. ist.

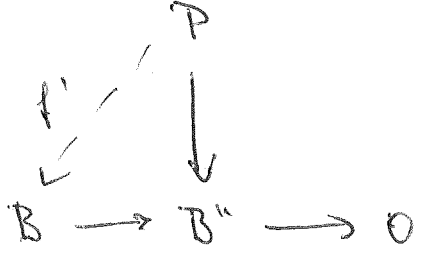
Satz 1.33 Sei  $\mathcal{L}$  ab. Kat.,  $P \in \text{ob } \mathcal{L}$ . Dann sind äquiv.

(i)  $P$  ist proj.

(ii) jede kurze ex. Seq  $0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} P \rightarrow 0$  zerfällt, d.h. es ex  $h$  mit  $gh = 1_P$ .

(iii) ist  $B \rightarrow B'' \rightarrow 0$  ex.,  $f: P \rightarrow B''$  gegeben, dann ex  $f': P \rightarrow B$ , so dass das Diagramm

kommutiert



Bew: (i)  $\Rightarrow$  (ii) Sei  $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow P \rightarrow 0$  eine kurze ex. Sequenz. Nach (i) ist dann auch