Wegen $m = \ker c$ ist m mono und $mc = 0$. Daher ex e' mit $f = me'$. Entsprechend finden wir $f = m'e$ mit e epi. Nach Lemma 20 ist wegen $mc = 0$ auch e' epi. Dann ist $\ker f = \ker e = \ker e'$, also $e' = he$ für einen Isom h. Daher ist $m' = m^* h$, und die Zerlegung eindeutig.

<u>Kor. 23</u> Ist $\mathcal{C}$ ab. Kat., dann ist f Isom gdw f mono und epi.

<u>Bew</u>: "$\Rightarrow$" gilt in allen Kat.

"$\Leftarrow$" Schreibe $f = 1 \cdot f = f \cdot 1$. Wegen der Eind. in Satz 22 ist f Isom.

<u>Achtung</u>: "$\Leftarrow$" gilt <u>nicht</u> in bel. Kat.

z.B. $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$ ist mono und epi in Rng, aber kein Isom.

<u>Def</u> 0.24 $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ add. Kat. Dann heißt ein Funktor $F: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ <u>add</u>, falls für alle $A, B \in \operatorname{ob} \mathcal{C}$ die induz. Abb. $\hom_{\mathcal{C}}(A, B) \longrightarrow \hom_{\mathcal{D}}(FA, FB)$ ein Gr.hom. ist.

<u>Bsp</u>: Ist $\mathcal{C}$ add., dann sind $\hom(A, -)$ und $\hom(-, B)$ add. Funktoren von $\mathcal{C}$ nach Ab.

<u>Im Folgenden</u>: werden wir immer voraussetzen, dass Funktoren auf ab. Kateg. add. sind!

<u>Bem</u>: Funktoren zwischen add. Kateg. sind genau dann add., wenn sie (Ko-) Produkte erhalten.

<u>Notation</u>: Schreibe
$$\operatorname{im} \alpha = \ker \operatorname{coker} \alpha$$
$$\operatorname{coim} \alpha = \operatorname{coker} \ker \alpha.$$

Also $\alpha = \operatorname{im} \alpha$, falls α mono, $\alpha = \operatorname{coim} \alpha$, falls α epi.

Def 0.25 (Komplexe in einer ab. Kat. $\mathcal{C}$)

Eine Folge $\ldots \to A_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} A_n \xrightarrow{f_n} A_{n+1} \to \ldots$ von Obj. und Morph. in $\mathcal{C}$ heißt Komplex, falls $f_n f_{n-1} = 0$ für alle n. Ist $\operatorname{im} f_{n-1} = \ker f_n$, dann heißt die Folge exakt an der Stelle A_n, und exakt, falls das für alle n gilt.

Bsp Für ex. Sequenzen:

(i) $0 \to A \to 0$ ex. $\Leftrightarrow A = 0$

(ii) $0 \to A \xrightarrow{f} B \to 0$ ex. $\Leftrightarrow f$ Isom. (in ab. Kat!)

(iii) $0 \to A_1 \xrightarrow{f_1} A_2 \xrightarrow{f_2} A_3 \to 0$ heißt kurze ex. Seq. Dann ist f_1 mono, f_2 epi.

Ein Funktor $F: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ heißt ex., wenn das Bild einer ex. Seq wieder ex. ist:

$$\ldots \to A_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} A_n \xrightarrow{f_n} A_{n+1} \to \ldots$$

$$\ldots \to FA_{n-1} \xrightarrow{Ff_{n-1}} FA_n \xrightarrow{Ff_n} FA_{n+1} \to \ldots$$

Ein Funktor F heißt links exakt (bzw rechts exakt), falls aus der Exaktheit von

$$0 \to A \to B \to C \quad (\text{bzw } A \to B \to C \to 0)$$

die Ex. von

$$0 \to FA \to FB \to FC \quad (\text{bzw } FA \to FB \to FC \to 0)$$

folgt.

Satz 0.26 Ist $\mathcal{C}$ ab. Kat., $A \in \operatorname{ob} \mathcal{C}$, dann sind die Funktoren $\hom(A, -)$ (und der kontrav. Funktor $\hom(-, A)$) links ex.

<u>Bew.</u> Sei $0 \to B \xrightarrow{f} C \xrightarrow{g} D$ ex, d.h. f mono, $\operatorname{im} f = \ker g$. z.z. ist

$$0 \to \hom(A,B) \xrightarrow{\hom(A,-)f} \hom(A,C) \xrightarrow{\hom(A,-)g} \hom(A,D)$$

ist ex. Zeige: $\hom(A,-)f$ ist mono. Ist $\varphi \in \hom(A,B)$ mit $\hom(A,-)f(\varphi) = f\varphi = 0$, dann ist $\varphi = 0$, da f mono. Weil $\hom(A,-)f$ ein Gr.hom. ist, folgt $\hom(A,-)f$ mono. Wegen $gf = 0$ folgt für alle $\varphi \in \hom(A,B)$ auch
$0 = gf\varphi = \hom(A,-)g\,[\hom(A,-)f]\varphi$, also

$$\hom(A,-)g \hom(A,-)f = 0, \text{ d.h. } \operatorname{im} f^* \subseteq \ker g^*.$$

Ist umgekehrt $\psi \in \ker(\hom(A,-)g)$, d.h. $\psi \in \hom(A,C)$ mit $g\psi = 0$, dann ex. $\varphi \in \hom(A,B)$ mit $\psi = f\varphi$, da $f = \ker g$, d.h. $\psi \in \operatorname{im} f = \ker \operatorname{coker} f$.

Der Beweis für den kontravar. Funktor $\hom(-,A)$ geht entsprechend. Dabei wird eine ~~rechts~~ ex. Sequenz in eine ~~links~~ ex. Sequenz überführt. $\square$

Wir definieren noch eine allgemeinere Form von (Ko-) Prod.

<u>Funktor-Kategorie</u>: Ist $\mathcal{C}$ eine ab. Kat., $\mathcal{D}$ eine kleine Kat., dann betrachte $\mathcal{C}^{\mathcal{D}}$ als Kat., deren Obj die Funktoren von $\mathcal{D}$ nach $\mathcal{C}$ sind mit natürl. Transform. als Morphismen.

<u>Spezialfall</u>: Ist $\mathcal{D} = I$ eine partiell geordnete Menge, dann sind die Obj. von $\mathcal{C}^I$ von der Form $(A_i, \alpha_{ij})_{i \in I}$ mit $A_i \in \operatorname{ob} \mathcal{C}$ und $\mathcal{C}$-Morph. $\alpha_{ij}: A_i \to A_j$ für $i \leq j$,

derart dass $\alpha_{ii} = 1$ und $\alpha_{jk}\alpha_{ij} = \alpha_{ik}$ für $i \le j \le k$.
Man sagt die α_{ij} sind <u>kohärent</u>.

Ein Morph. $f : (A_i, \alpha_{ij}) \longrightarrow (B_i, \beta_{ij})$ ist gegeben durch Abb $f_i : A_i \to B_i$ mit $f_j \alpha_{ij} = \beta_{ij} f_i$ für $i \le j$.

Der Diagonalfunktor $\Delta : \mathcal{C} \to \mathcal{C}^J$ ist gegeben durch

$$\Delta A = (A_i, \alpha_{ij}) \text{ mit } A_i = A,\ \alpha_{ij} = 1_A \text{ für alle } i \le j.$$

Wir def. nun den direkten (oder induktiven) Limes als Links-adj. Funktor von Δ. D.h.

<u>Def</u> 1.27 $L \in \operatorname{ob} \mathcal{C}$ heißt Kolimes (oder dir. Limes) von (A_i, α_{ij}), $L = \varinjlim (A_i, \alpha_{ij})$, wenn es Morph. $u_i : A_i \to L$ gibt mit $u_i = u_j \alpha_{ij}$ und derart, dass für jede Abb $(f_i)_{i \in J} \in \hom_{\mathcal{C}^J}((A_i, \alpha_{ij}), \Delta B)$ ein eind. $g : L \to B$ ex. mit $f_i = g u_i$.

$$\begin{tikzcd}
A_i \arrow[dd, "\alpha_{ij}"'] \arrow[dr, "u_i"] \arrow[drr, "f_i"] & & \\
& L \arrow[r, dashed, "g"] & B \\
A_j \arrow[ur, "u_j"] \arrow[urr, "f_j"'] & &
\end{tikzcd}$$

<u>Bem</u>: (i) Offens. sind Kolimiten bis auf Isom eind., falls sie ex. Dann gilt

$$\hom_{\mathcal{C}}(L, B) \cong \hom_{\mathcal{C}^J}((A_i, \alpha_{ij}), \Delta B),$$

d.h. $\varinjlim_J$ ist links-adj. Funktor zu Δ.

(ii) Entsprechend wird der <u>proj. Limes</u> def. als rechts adj. Funktor zu Δ, d.h. wir haben

$C = \varprojlim (A_i, \alpha_{ij})$ mit

$$\begin{tikzcd} & & A_i \arrow[d, "\alpha_{ij}"] \\ B \arrow[r, dashed] \arrow[urr] \arrow[drr] & C \arrow[ur] \arrow[dr] & A_j \end{tikzcd}$$

Spezialfälle: Ist I ungeordnet, dann ist

$\varinjlim A_i = \coprod A_i$, $\varprojlim A_i = \prod A_i$.

Für ein Tripel $I = \{i, j, k\}$, $i, j < k$ heißt

$\varinjlim A_i$ pushout $\quad k < i, j$

$\varprojlim A_i$ pull-back $\quad$ der A_i

Bem: Push-out und Pullbacks ex. in ab. Kat. (später)

Bsp: (i) Sei K Körper, (E_i) die Familie aller endl. Körpererw von K mit Inklusionen als Abb. Dies bildet eine gerichtete Familie, d.h. für alle i, j ex k mit $i, j \le k$. Der Kolim. der (E_i) ist alg. über K und alg. abg., also genau der alg. Abschluss von K.

(ii) Sei F freie Gr. von Rang > 1, (N_i) die Fam. aller NT von endl. Index in F. Dann sind alle $G_i = F/N_i$ endl. Gr. und für $N_i \le N_j$ ex. natürl. Homom $\varphi_{ij} : G_i \to G_j$, die ein kohärentes System bilden. Mit N_i, N_j hat auch $N_i \cap N_j$ endl. Index in F und wir können den proj. Limes $G = \varprojlim G_i$ bilden. Solche Gr. heißen <u>profinit</u>, d.h. proj. Limes endl. Gr.

Da die natürl. Homom. $F \to G_i$ mit den φ_{ij} kompat.

sind, ex. ein natürl. Homom. $\mu : F \to G$.

(Wegen $\bigcap N_i = 1$ ist μ inj., aber nicht surj., da F abz., G überabz.)

(iii)'+(ii)'. Nimmt man in (i) einen Körper K der char 0 und für (E_i) sämtliche endl. Galoiserw. von K, dann ist der Kolim. der E_i wieder der alg. Abschluss von K. Der proj. Limes der zugeh. Galoisgr. ist eine profinite Gr., die abs. Galoisgr. von K, d.h.

$$Gal(K^{alg} \mid K).$$

<u>Lemma</u> 1.28 In ab. Kat. ex. Pull-backs und Push-out

<u>Bew</u>: Seien $\alpha : A \to C$, $\beta : B \to C$ gegeben.

$p : A \Pi B \to A$, $q : A \Pi B \to B$.

Dann ist $P = \ker(\alpha p - \beta q)$ der Pull-back

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r] & A \Pi B \arrow[r, "p"] \arrow[dr, "q"'] & A \arrow[dr, "\alpha"] & \\ & & B \arrow[r, "\beta"'] & C \end{tikzcd}$$

Dies folgt sofort aus der univ. Eigenschaft des Produkts. (ÜA)

<u>Lemma</u> 1.29 Ist
$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\alpha'"] \arrow[d, "\beta'"'] & B \arrow[d, "\beta"] \\ A \arrow[r, "\alpha"'] & C \end{tikzcd}$$
ein Pull-back, dann ist $\ker \alpha \cong \ker \alpha'$

Insbesondere ist α mono $\Leftrightarrow$ α' mono.

<u>Bew:</u> Sei $K', \nu' = \ker \alpha'$, K, ν mit $\alpha\nu = 0$

$$\begin{tikzcd} K' \arrow[r, "\nu'"] & P \arrow[r, "\alpha'"] \arrow[d, "\beta'"] & B \arrow[d, "\beta"] \\ K \arrow[u, "\mu"] \arrow[ur, "\lambda"] \arrow[urr, dotted, "0"] \arrow[r, "\nu"'] & A \arrow[r, "\alpha"'] & C \end{tikzcd}$$

Dann macht $K \xrightarrow{0} B$ das Diagr. kommutativ.
Daher ex. eind. $\lambda : K \to P$ mit $\alpha'\lambda = 0$, $\beta'\lambda = \nu$, denn P ist Pull-back. Wegen $\nu' = \ker \alpha'$ ex. eind. $\mu : K \to K'$ mit $\lambda = \nu'\mu$, also $\nu = \beta'\nu'\mu$, d.h. $\beta'\nu' : K' \to A$ ist ker von α
(Setze $K = K'$, $\nu = \beta'\nu'\mu$. Dann ist $\mu = id$.)

<u>Lemma</u> 1.30 Sei $\mathcal{C}$ ab. Kat., $p : A \pi B \to A$
$q : A \pi B \to B$

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\alpha'"] \arrow[d, "\beta'"'] & B \arrow[d, "\beta"] \\ A \arrow[r, "\alpha"'] & C \end{tikzcd} \qquad f = \alpha p - \beta q$$

$$P \to A \pi B \xrightarrow{f} C.$$

Dann gilt:

$0 \to P \to A \pi B \to C$ ex $\Leftrightarrow$ P Pullback

$P \to A \pi B \to C \to 0$ ex $\Leftrightarrow$ C Pushout

$0 \to P \to A \pi B \to C \to 0$ $\Leftrightarrow$ Pullback und Pushout.

<u>Kor</u> 1.31 Ist $\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\alpha'"] \arrow[d] & B \arrow[d, "\beta"] \\ A \arrow[r, "\alpha"] & C \end{tikzcd}$ Pullback, $\alpha : A \to C$ epi, dann auch $\alpha' : P \to B$ epi.

Bew Dual dazu:

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\alpha'"] \arrow[d] & B \arrow[d] \\ A \arrow[r, "\alpha"] & C \end{tikzcd}$$

Pushout, $\alpha' : P \to B$ mono, dann auch $\alpha : A \to C$ mono.

Es ist $P \to A \pi B \to C \to 0$ ex und

$P \to A \pi B$ mono, weil

$\alpha' : P \to A \pi B \to B$ nach Voraus. mono.

Also ist das Diagramm auch Pullback und die Beh. folgt aus Lemma 1.28.

Def 1.32 Sei $\mathcal{C}$ ab. Kat. Dann heißt $P \in ob\, \mathcal{C}$ proj. falls $hom(P, -)$ ex. ist und $J \in ob\, \mathcal{C}$ heißt inj. falls $hom(-, J)$ ex. ist.

Satz 1.33 Sei $\mathcal{C}$ ab. Kat., $P \in ob\, \mathcal{C}$. Dann sind äquiv.

(i) P ist proj.

(ii) jede kurze ex. Seq

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r, "g"] & P \arrow[r] \arrow[l, bend left, "h"] & 0 \end{tikzcd}$$

zerfällt, d.h. es ex h mit $gh = 1_P$.

(iii) ist $B \xrightarrow{g} B'' \to 0$ ex., $f : P \to B''$ gegeben, dann ex $f' : P \to B$, so dass das Diagramm kommutiert

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d] \arrow[dl, dashed, "f'"'] & \\ B \arrow[r] & B'' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Bew: (i) $\Rightarrow$ (ii) Sei $0 \to A \to B \to P \to 0$ eine kurze ex Sequenz. Nach (i) ist dann auch