<u>Bew</u> Dual dazu:

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\alpha'"] \arrow[d] & B \arrow[d] \\ A \arrow[r, "\alpha"] & C \end{tikzcd}$$

Pushout, $\alpha' : P \to B$ mono, dann auch $\alpha : A \to C$ mono.

Es ist $P \to A \pi B \to C \to 0$ ex und

$P \to A \pi B$ mono, weil

$\alpha' : P \to A \pi B \to B$ nach Voraus. mono.

Also ist das Diagramm auch Pullback und die Beh. folgt aus Lemma 1.28.

<u>Def 1.32</u> Sei $\mathcal{C}$ ab. Kat. Dann heißt $P \in \operatorname{ob} \mathcal{C}$ <u>proj.</u> falls $\hom(P, -)$ ex. ist und $J \in \operatorname{ob} \mathcal{C}$ heißt <u>inj.</u> falls $\hom(-, J)$ ex. ist.

<u>Satz 1.33</u> Sei $\mathcal{C}$ ab. Kat., $P \in \operatorname{ob} \mathcal{C}$. Dann sind äquiv.

(i) P ist proj.

(ii) jede kurze ex. Seq $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} P \to 0$ zerfällt, d.h. es ex h mit $gh = 1_P$.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r, "g"] & P \arrow[r] \arrow[l, bend left, "h"] & 0 \end{tikzcd}$$

(iii) ist $B \xrightarrow{g} B'' \to 0$ ex., $f : P \to B''$ gegeben, dann ex $f' : P \to B$, so dass das Diagramm kommutiert

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "f'"'] \arrow[d] & \\ B \arrow[r] & B'' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

<u>Bew</u>: (i) $\Rightarrow$ (ii) Sei $0 \to A \to B \to P \to 0$ eine kurze ex Sequenz. Nach (i) ist dann auch

$$0 \to \hom(P,A) \xrightarrow{f^*} \hom(P,B) \xrightarrow{g^*} \hom(P,P) \to 0$$

ex. Seq. von abel. Gr. Es ist $1_P \in \hom(P,P)$ und aus der Exaktheit folgt, dass $h \in \hom(P,B)$ ex mit $g^*(h) = gh = 1_P$.

(ii) ⇒ (iii) Betrachten den Pullback

$$\begin{tikzcd} \ker g' \arrow[r] & C \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "f'"'] & P \arrow[r] \arrow[d, "f"] \arrow[dl, dashed] & 0 \\ & B \arrow[r, "g"'] & B'' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Dann ist mit g auch g' epi nach Kor. 1.31. Nach (ii) zerfällt die ex. Seq $\ker g' \to C \xrightarrow{g'} P \to 0$, d.h. es ex h mit $1_P = hg'$, und $f'h : P \xrightarrow{h} B$ ist die ges. Abb.

(iii) ⇒ (i) Ist $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ eine kurze ex. Seq., dann betrachte

$$0 \to \hom(P,A) \xrightarrow{f^*} \hom(P,B) \xrightarrow{g^*} \hom(P,C) \to 0 \quad (*)$$

Da $\hom(P,-)$ linksex. ist, genügt es, die Ex. an der Stelle $\hom(P,C)$ zu zeigen. Nach (iii) liftet jeder Morph. $P \to C$ zu einem Morph. $P \to B$, d.h. g^* ist surj und $(*)$ ex.

Entsprechend gilt der duale Satz für inj. Obj:

<u>Satz 1.34</u> Sei $\mathcal{C}$ ab. Kat., $J \in \operatorname{ob} \mathcal{C}$. Dann sind äquiv. (i) J ist inj.

(ii) Jede kurze ex Seq $0 \to J \to B \to C \to 0$ zerfällt.

(iii) Für ex. Folge $0 \to A' \to A$ und $g: A' \to J$ ex. $g': A \to J$, so dass das Diagr. kommutiert

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A' \arrow[r] \arrow[d, "g"'] & A \arrow[dl, dashed, "g'"] \\ & J & \end{tikzcd}$$

Bew: Inj. Obj. in $\mathcal{C}$ sind die proj. Obj. in $\mathcal{C}^{op}$.

Wir wollen diese Begriffe auf die Kat. R-mod anwenden und brauchen noch einige Vorüberlegungen.

Lemma 1.35 Ein Funktor zwischen ab. Kat. $F: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ erhält inex. Seq. gdw F treu ist. (d.h. $F(f)=0 \Rightarrow f=0$)

Bew: "$\Rightarrow$" Sei $f: A \to B$ mit $f \neq 0$, dann ist

$A \xrightarrow{1_A} A \xrightarrow{f} B$ inex., also auch unter F inex., d.h. $F(f) \neq 0$.

"$\Leftarrow$" Sei F treu, $F(A) \xrightarrow{Ff} FB \xrightarrow{Fg} FC$ ex.

z.z. $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ ex.

Wegen $0 = F(gf) = F(g)F(f)$ folgt $gf = 0$.

Betrachte $\ker g$. Es ist $\ker g \; g = 0$, also $F(\ker g)F(g) = 0$, daher ex $F(\ker g) \to \ker F(g)$ und entspr. $\operatorname{coker} F(f) \to F(\operatorname{coker} f)$.

Nach Vorauss. ist

$$F(\ker g) \to \ker F(g) \to F(B) \to \operatorname{coker} F(f) \to F(\operatorname{coker} f)$$

ex. an der Stelle $F(B)$, d.h.

$\ker F(g) \to F(B) \to \operatorname{coker} F(f)$ ist Nullabb.

und daher, ~~weil Erhalten~~ auch

$F(\ker g) \to FB \to F(\operatorname{coker} f)$ die Nullabb.
Weil F treu ist, folgt $\operatorname{coker} f \ker g = 0$ und damit die Beh.

<u>Erinnerung</u> Funktoren $F: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, $G: \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ heißen links- (bzw rechts) adj., wenn für alle $X \in \operatorname{ob} \mathcal{D}$, $A \in \operatorname{ob} \mathcal{C}$ gilt

$$\hom_{\mathcal{C}}(GX, A) \simeq \hom_{\mathcal{D}}(X, FA)$$

(Wobei wir bei ab. Kat. Gr. isom. verlangen)

<u>Bem</u> 1.36 Adj. Funktoren sind bis auf Isom. eind.: Ist $\hom_{\mathcal{D}}(X, FA) \simeq \hom_{\mathcal{D}}(X, F'A)$ für alle $X \in \operatorname{ob} \mathcal{D}$, $A \in \operatorname{ob} \mathcal{C}$, setze $X = FA$ und $f \in \hom(FA, F'A)$ das Bild von 1_{FA}. Dann setze $X = F'A$ und $g \in \hom(F'A, FA)$ das Urbild von $1_{F'A}$. Dann gilt

$$fg = 1_{F'A}, \quad gf = 1_{FA}, \text{ d.h. } f \text{ ist natürl. Isom.}$$

<u>Bem</u> 1.37 Der Funktor $\hom(-,-): \mathcal{C}^{op} \times \mathcal{C} \to Ab$ ist treu
[F ist treu, falls für alle A, B

$$\hom_{\mathcal{C}}(A, B) \to \hom(FA, FB) \text{ inj.}]$$

<u>Bew</u>:
Ist $(f, g): (A, B) \to (C, D)$, dann ist

$$\hom(f, g): \hom(A, B) \to \hom(C, D), \ k \mapsto gkf.$$

Daher ist

$$\begin{aligned} \hom((A,B),(C,D)) &\to \hom(\hom(A,B), \hom(C,D)) \\ (f,g) &\longmapsto [k \mapsto gkf] \quad \text{inj.} \end{aligned}$$

Bsp: $\hom(\mathbb{Q}, -) : Ab \to Ab$ ist nicht treu:

Ist $f : \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Q} \to \mathbb{Z}$ die Proj. auf $\mathbb{Z}$, dann ist

$$\hom(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Q}, \mathbb{Z}) \to \hom(\hom(\mathbb{Q}, \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Q}), \hom(\mathbb{Q}, \mathbb{Z}))$$
$$f \longmapsto [k \mapsto fk]$$

und für $k \in \hom(\mathbb{Q}, \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Q})$ ist $fk = 0$, d.h. dieser Homom. ist nicht inj.

Satz 1.38 Sind $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ adj. Funktoren ab. Kat., dann ist das Linksadj. rechts ex und das Rechtsadj. linksex.

Bew: Sei $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ ex. Dann ist auch folgendes Diagramm ex

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \to & \hom(GD, A) & \to & \hom(GD, B) & \to & \hom(GD, C) \\ & \wr\wr & & \wr\wr & & \wr\wr \\ 0 \to & \hom(D, FA) & \to & \hom(D, FB) & \to & \hom(D, FC). \end{array}$$

Da dies für alle $D \in ob\,\mathcal{D}$ gilt, folgt jetzt aus der Treue des $\hom(-,-)$-Funktors und Lemma 35, dass $0 \to FA \to FB \to FC$ ex. ist.

§2. Die Kategorie R-mod

Wir wissen schon, dass R-mod eine abel. Kat. bildet. Ist R eine K-Alg. für einen komm. Ring K, dann betrachten wir auch $\hom_R(M,N)$ als K-Mod. für R-Moduln M,N. Ein Funktor F heißt dann K-lin., falls $F(f+g) = F(f) + F(g)$

$$F(\alpha \cdot f) = \alpha F(f) \quad \text{für } \alpha \in K.$$

Für $K = \mathbb{Z}$ erhalten wir den ursprüngl. Begriff einer R-Modulstr. durch Homom. $R \to \operatorname{End}_K(M)$.

Erinnerung: R^{op}-Rechts-Moduln $\simeq$ R-Links-Mod.

Sind R, S Ringe, dann sei ${}_R\mathrm{Mod}_S$ die Kat. der (R,S)-Bimoduln.

Lemma 1 Sind R, S, T Ringe, $F: \mathrm{Mod}_R \to \mathrm{Mod}_S$ ein kovar. Funktor, dann induz F einen Funktor

$$F' : {}_T\mathrm{Mod}_R \longrightarrow {}_T\mathrm{Mod}_S .$$

(Ist F kontravar., dann induz. es $F' : {}_T\mathrm{Mod}_R \to {}_S\mathrm{Mod}_T$.)

Bew: Für einen (T,R)-Bimodul M ist $F(M)$ ein S-Rechts-Modul und für jedes $t \in T$ definiert $F(t)$ eine Wirkung auf $F(M)$, also einen Endom. von $F(M)_S$, d.h. ein Element von $\operatorname{End}_S(F(M))$. Daher ist für $x \in F(M)$, $a \in S$

$$(xa)F(t) = x F(t) a .$$

Daher ist die Abb. $T \to \operatorname{End}_S(M)$, $t \mapsto F(t)$ ein Antihomom, d.h. Homom. von $T^{op} \to \operatorname{End}_S(M)$, denn weil M ein Links-T-Modul ist, ist für $t, t' \in T$ dann $F(tt') = F(t')F(t)$. Daher ist M

ein (T, S) - Bimodul. Weil die Homom. zwischen (T, R) - Bimoduln genau die R - Mod. - Homom. sind, die T zentralisieren, ist dann $F(t)$ einen S - Mod-Hom, der T zentralisiert, d.h. ein Homom. zwischen (T, S) - Bimoduln.

<u>Bsp und Vorüberlegung</u>: Sei M ein (S, R) - Bimodul, N ein (T, R) - Bimodul (d.h. $({}_S M_R, {}_T N_R)$), $H = \mathrm{Hom}_R(M, N)$. Dann ist H ab. Gr. (oder K - Modul).

Die T - Links - Modulstr. von N induz. T - Links - Modstr. auf H und die S - Links - Modulstr. auf M induziert S - Rechtsmodulstr. auf H (denn $\mathrm{Hom}(M, N)$ ist kontravar. in M). Damit ist H ein (T, S) - Bimodul: Für $r \in R$, $s \in S$, $t \in T$, $x \in M$, $f \in H$ ist

$$f(x)r = f(x \cdot r)$$
$$(fs)(x) = f(sx)$$
$$(tf)(x) = t(f(x)). \quad \text{Also ist}$$

$$((tf)s)(x) = (tf)(sx) = t[f(sx)] = [t(fs)](x)$$

d.h. $(tf)s = t(fs)$.

<u>Bsp</u>: Tensorprod. von R - Moduln, R nicht notw. kommutativ! Sind $(U_R, {}_R V)$ gegeben, dann def. $U \otimes_R V$ als den K - Modul mit Abb $\tau: U \times V \to U \otimes_R V$, die univ. ist für

K-bilin. Abb $f: U \times V \to M$, die R-balanciert sind, d.h. für die gilt $f(xr, y) = f(x, ry)$ für $x \in U$, $y \in V$, $r \in R$.

In Alg II haben wir $U \otimes_K V$ def. Wir erhalten

$$U \otimes_R V \simeq U \otimes_K V / \langle xr \otimes y - x \otimes ry \mid x \in U, y \in V, r \in R \rangle$$

Sind Bimoduln $({}_Q U_R, {}_R V_S, {}_T W_S)$ gegeben, dann haben wir folgende Isom. von (T, Q)-Bimod.

$$\mathrm{Hom}_S(U \otimes_R V, W) \simeq \mathrm{Hom}_R(U, \mathrm{Hom}_S(V, W))$$

(nämlich $\varphi \mapsto \bar{\varphi}$, wobei $\varphi(u \otimes v) = w$

$\bar{\varphi}(u) = [v \mapsto \varphi(u \otimes v)]$.)

Mit anderen Worten: $\_ \otimes_R V$ ist linksadj. Funktor zum Funktor $\mathrm{Hom}_S(V, \_)$ für (R, S)-Bimodul V.

Aus Symmetriegründen gilt für $({}_S U_R, {}_R V_T, {}_S W_Q)$ auch

$$\mathrm{Hom}_S(U \otimes_R V, W) \simeq \mathrm{Hom}_R(V, \mathrm{Hom}_S(U, W)).$$

Daher gilt:

<u>Satz</u> 2.2 Ist V R-Links-Modul, dann ist der Tensorprod. funktor $\_ \otimes_R V$ rechtsex. (und erhält dir. Summen)

Entsprechendes gilt für R-Rechtsmoduln und $V \otimes_R \_$.

<u>Bem</u>: Es gilt: Ein R-Modul ist proj. gdw es dir. Summand in einem freien Modul ist und inj. gdw er in jedem Modul, der ihn enthält, ein dir. Summand ist.

Def 2.3. $M \subseteq N$ R-Moduln. Dann heißt N wesentliche Erweiterung von M (bzw. M ist groß in N), wenn M jeden von Null versch. Untermodul von N nicht-triv. schneidet.

Satz 2.4 Ein R-Modul ist inj. gdw er keine echten wesentl. Erw. hat

Bew: "$\Rightarrow$" Sei M inj. Dann sitzt M in jeder echten Erw. als dir. Summand. (Satz 1.34)

"$\Leftarrow$" Sei $M \subseteq L$ eine Erw. Dann hat die Familie $\{N \subseteq L \mid N \cap M = 0,\ N \text{ Untermod.}\}$ nach Zorns Lemma ein max. Element N_0. Setze $\bar{L} = L/N_0$. Wegen $M \cap N_0 = 0$ ist $M \cong \bar{M} \subseteq \bar{L}$. Da N_0 max. war, ist $\bar{L}$ eine wesentl. Erw. von $\bar{M} \cong M$, nach Voraus. also $\bar{L} = \bar{M}$, d.h. $M + N_0 = L$, $M \cap N_0 = 0$, d.h. M ist dir. Summand in L.

Satz 2.5 (Baers Kriterium). Ein R-Links-Modul M ist inj. gdw sich jeder Homom $\varphi: J \to M$ zu einem Homom $\bar{\varphi}: R \to M$ fortsetzen lässt für jedes Linksideal $J \trianglelefteq R$.

Bew: "$\Rightarrow$" Klar.

"$\Leftarrow$" Reicht z.z.: M hat keine wesentl. Erw.
Sei $M \subset L$ eine echte Erw., $u \in L \setminus M$ und betrachte den Pullback

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "i'"] \arrow[d] & R \arrow[d, "\varphi"] \arrow[dl, dashed, "i"'] \\ M \arrow[r, hook] & L \end{tikzcd}$$

mit $\varphi: R \to L,\ t \mapsto t \cdot u$.

Nach Lemma 1.29 ist i' mono, d.h. $P \cong J \trianglelefteq R$

für ein Linksideal J in R. Nach Voraus lässt sich $i: P \to M$ fortsetzen zu $\bar{i}: R \to M$.
Sei $\bar{i}(1_R) = v \in M$. Dann ist für alle $x \in P$
$$\bar{i}(x) = \bar{i}(x1) = xv = xu \in \square.$$
Ist $xu \in M$, dann ist $x \in P$, weil P Pullback.
Daher ist $R(u-v)$ ein R-Untermodul von L mit $R(u-v) \cap M = 0$. Wegen $u \notin M$, $v \in M$ ist $u - v \neq 0$, also $R(u-v) \neq 0$. Daher ist L keine wesentl. Erw. von M. Da L bel. war, folgt aus Satz 2.4, dass M inj.

<u>Satz</u> 2.6 Ist R nullteilerfrei, dann ist jeder inj. R-Modul divisibel, d.h. die Gleichung $m = ax$ mit $m \in M$, $a \in R^*$ hat eine Lösung in M. Ist R ein Hauptidealring, dann ist auch jeder div. R-Modul inj.. Insbesondere gilt für $\mathbb{Z}$-Moduln inj = div.

<u>Bew</u>: Sei R nullteilerfrei. Dann ist die Abb
$\varphi: Ra \to M$, $ra \mapsto rm$ ein Homom. Ist M inj., dann lässt sich φ fortsetzen zu $\bar{\varphi}: R \to M$, $\bar{\varphi}(1) = x \in M$ ist dann eine Lösung.
Ist R Hauptidealring, M div. R-Modul, $\mathfrak{A} \trianglelefteq R$ Linksideal und $\varphi: \mathfrak{A} \to M$ ein Homom., dann ist $\mathfrak{A} = Ra$ für ein $a \in R$. Ist $\varphi(a) = m$, dann ist $\varphi(ra) = rm$.
Weil M div. ist, ex. eine Lösung u für die Gleich. $m = ax$. Daher ist $\bar{\varphi}: R \to M$, $r \mapsto ru$ ein Homom, der φ fortsetzt, denn $\bar{\varphi}(ra) = rau = rm$.