Der Algorithmus von Tate für elliptische Kurven

Freie wissenschaftliche Arbeit zur Erlangung des Grades eines Diplommathematikers am Mathematischen Fachbereich der Universität Ulm

Eingereicht von:

Urs Hartl

Referent:

Prof. Dr. W. Lütkebohmert

Ulm, den 11. November 1995

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

Ausgangspunkt für diese Diplomarbeit ist die folgende Situation. Eine elliptische Kurve E über einem Zahlkörper K sei gegeben durch eine kubische Gleichung in projektiven Koordinaten. Multipliziert man diese Gleichung mit ihrem Hauptnenner, so ist E über $\mathcal{O}_K$, dem Ring der ganzen Zahlen in K definiert. Sei nun $\mathcal{P}$ ein Primideal in $\mathcal{O}_K$. Dann kann man die elliptische Kurve E modulo $\mathcal{P}$ reduzieren und erhält so eine Kurve $\widetilde{E}$. Die Frage ist nun, was ist $\widetilde{E}$? Anders formuliert, man betrachtet eine Kurve $\mathcal{W}$ über $\mathcal{O}_K$, deren Faser über dem generischen Primideal (0) von $\mathcal{O}_K$ die elliptische Kurve E/K ist und fragt, was ist die Faser $\widetilde{E}$ über $\mathcal{P}$. Man interessiert sich speziell für zwei wichtige Eigenschaften dieser Reduktion.

Zum einen, da E/K projektiv ist, läßt sich jeder K-wertige Punkt von E zu einem $\mathcal{O}_K/\mathcal{P}$-wertigen Punkt von $\widetilde{E}$ reduzieren.

Zum anderen besitzt die elliptische Kurve E eine Gruppenstruktur und man fragt, ob sich diese unter der Reduktion zu einer Gruppenstruktur auf $\widetilde{E}$ fortsetzt.

Mehrere Fälle können eintreten.

1. $\widetilde{E}$ ist eine elliptische Kurve. Dieser Fall wird *gute Reduktion* genannt.
2. $\widetilde{E}$ ist eine Kurve mit einem gewöhnlichen Doppelpunkt. Dieser Fall wird *multiplikative Reduktion* genannt.
3. $\widetilde{E}$ ist eine Kurve mit einer Spitze. Dieser Fall wird *additive Reduktion* genannt.

Diese Tatsache wird in den Sätzen 2.27 und 2.29 bewiesen.

In den Fällen 2. und 3. besitzt $\widetilde{E}$ einen singulären Punkt P und die Gruppenverknüpfungen sind an P nicht definiert (vergleiche Satz 3.2). Andererseits gibt es aber K-wertige Punkte von E, die zu P reduziert werden. In Bezug auf die beiden obigen Eigenschaften ist man also in dem Dilemma, daß weder das Entfernen noch das Behalten von P beide Eigenschaften ermöglicht.

Die Lösung dafür ist nun ein sogenanntes *Néron-Modell*, das beide Eigenschaften besitzt (vergleiche Kapitel 3). Dieses erhält man schrittweise. Die Reduzierung modulo $\mathcal{P}$ ist ein lokaler Vorgang über dem diskreten Bewertungsring $\mathcal{O}_{K,\mathcal{P}}$. Also konstruiert man zuerst für alle Primideale $\mathcal{P}$ von $\mathcal{O}_K$ ein lokales Néron-Modell für E über $\mathcal{O}_{K,\mathcal{P}}$ und versucht dann diese zu einem globalen Néron-Modell $\mathcal{E}$ über $\mathcal{O}_K$ zusammenzukleben. Wir wollen in dieser Arbeit nur den lokalen Fall $\mathcal{E}/R$ über einem diskreten Bewertungsring R studieren.

Die Frage die Anstoß zu dieser Diplomarbeit gab, ist nun, wo sich die ursprüngliche Kurve $\mathcal{W}/R$ im Néron-Modell $\mathcal{E}/R$ wiederfinden läßt. Dazu untersucht man die spezielle Faser von $\mathcal{E}$ über dem maximalen Ideal von R. Ein mächtiges Werkzeug für diese Untersuchung ist der *Algorithmus von Tate für elliptische Kurven*. Er berechnet die Struktur der speziellen Faser des Néron-Modells $\mathcal{E}$ und alle mit ihr zusammenhängenden Daten.

Nach einer vorbereitenden Zusammenstellung der benötigten Konzepte aus der algebraischen Geometrie in Kapitel 2 wird in Kapitel 3 die genaue Definition eines Néron-Modells gegeben und seine Existenz gezeigt. In Kapitel 4 wird der Algorithmus von Tate vorgestellt. Der ausführliche Beweis, daß der Algorithmus korrekt ist und die richtigen Daten liefert, schließt sich in Kapitel 5 an.

Hier sei noch ein Hinweis zur Notation gegeben. Für einen Ring R beziehungsweise einen graduierten Ring S werden die Punkte von *Spec R* beziehungsweise *Proj S* in dieser Arbeit durch die enstsprechenden Primideale der Ringe bezeichnet. Zum Beispiel wird der Punkt von $\mathbf{P}^2_K = \text{Proj } K[X,Y,Z]$ mit den Koordinaten $X=0$ und $Y=0$ durch das Primideal (X,Y) von $K[X,Y,Z]$ bezeichnet.

Kapitel 2

Grundlagen aus der algebraischen Geometrie

An Grundbegriffen zum Verständnis sollten die Definitionen eines Schemas, eines Morphismus von Schemata, sowie eines Produkts von Schemata bekannt sein. Ferner wird eine gewisse Vertrautheit mit dem Garbenbegriff vorausgesetzt. Diese Vorkenntnisse entsprechen etwa dem in Hartschorne [Ha], Chapter II, Abschnitte 1 bis 5 Beschriebenen.

Ein integres Schema X ist in dieser Arbeit ein Schema X, bei dem für jede offene Menge $U \subset X$ der Ring $\mathcal{O}_X(U)$ integer ist. Ein Schema X ist genau dann integer, wenn es irreduzibel und reduziert ist.

2.1 Separierte und eigentliche Morphismen

In diesem Abschnitt sollen kurz die Begriffe „separiert“ und „eigentlich“ vorgestellt werden. Beides sind Eigenschaften von Morphismen von Schemata, die bekannten Eigenschaften von gewöhnlichen topologischen Räumen entsprechen. Separiert entspricht hausdorffsch und eigentlich entspricht der gewöhnlichen Vorstellung von eigentlich, nämlich daß die Urbilder kompakter Mengen kompakt sind.

Definition 2.1
Sei $f : X \to Y$ ein Morphismus von Schemata. Der *Diagonalmorphismus* ist der eindeutig bestimmte Morphismus $\Delta : X \to X \times_Y X$, dessen Komposition mit beiden Projektionen $pr_1, pr_2 : X \times_Y X \to X$ die Identität auf X ist. Der Morphismus f heißt *separiert*, falls der Diagonalmorphismus eine abgeschlossene Einbettung ist. In diesem Fall heißt X *separiert* über Y.

Für die Definition von eigentlich benötigt man zuerst noch folgende Begriffe:

Definition 2.2
Ein Morphismus $f : X \to Y$ ist *von endlichem Typ*, falls es eine offene affine Überdeckung $V_i = Spec\ B_i$ von Y gibt, so daß für jedes i das Urbild $f^{-1}(V_i)$ von endlich vielen offenen

affinen Teilmengen $U_{ij} = Spec\ A_{ij}$ überdeckt werden kann, wobei jedes A_{ij} eine endlich erzeugte B_i-Algebra ist.

Definition 2.3
Ein Morphismus heißt *abgeschlossen*, falls das Bild jeder abgeschlossenen Menge abgeschlossen ist. Ein Morphismus $f : X \to Y$ von Schemata heißt *universell abgeschlossen*, falls f abgeschlossen ist und für jeden Morphismus $Y' \to Y$ der durch Basiserweiterung erhaltene zugehörige Morphismus $f' : X' \to Y'$ ebenfalls abgeschlossen ist.

Definition 2.4
Ein Morphismus $f : X \to Y$ heißt *eigentlich*, falls f separiert, von endlichem Typ und universell abgeschlossen ist.

Für die folgenden Kriterien benötigt man den Begriff des noetherschen Schemas.

Definition 2.5
Ein Schema X heißt *noethersch*, falls es eine endliche Überdeckung mit offenen affinen Teilmengen $Spec\ A_i$ besitzt, bei der jeder Ring A_i noethersch ist.

Es gelten die folgenden Kriterien für separierte sowie eigentliche Morphismen.

Satz 2.6 (Bewertungskriterium für separiert)
Sei $f : X \to Y$ ein Morphismus von endlichem Typ und X noethersch. So ist f separiert genau dann, wenn folgende Bedingung gilt: Für jeden Körper K und jeden Bewertungsring R mit Quotientenkörper K sei $T = Spec\ R$, $U = Spec\ K$ und $i : U \to T$ der von der Inklusion $R \subset K$ induzierte Morphismus. Zu jedem Morphismus von T nach Y und jedem Morphismus von U nach X, die ein kommutierendes Diagramm ergeben,

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r] \arrow[d, "i"'] & X \arrow[d, "f"] \\ T \arrow[r] \arrow[ur, dashed] & Y \end{tikzcd}$$

gibt es höchstens einen Morphismus von T nach X, der das gesamte Diagramm kommutativ macht.

Beweis: Siehe Hartshorne [Ha] Chapter II, Theorem 4.3 .

Satz 2.7 (Bewertungskriterium für eigentlich)
Sei $f : X \to Y$ ein Morphismus von endlichem Typ und X noethersch. So ist f eigentlich genau dann, wenn folgende Bedingung gilt: Für jeden Körper K und jeden Bewertungsring R mit Quotientenkörper K sei $T = Spec\ R$, $U = Spec\ K$ und $i : U \to T$ der von der Inklusion $R \subset K$ induzierte Morphismus. Zu jedem Morphismus von T nach Y und jedem Morphismus von U nach X, die ein kommutierendes Diagramm ergeben,

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r] \arrow[d, "i"'] & X \arrow[d, "f"] \\ T \arrow[r] \arrow[ur, dashed] & Y \end{tikzcd}$$

gibt es genau einen Morphismus von T nach X, der das gesamte Diagramm kommutativ macht.

Beweis: Siehe Hartshorne [Ha] Chapter II, Theorem 4.7 .

Viele eigentliche Morphismen erhält man durch folgendes

Korollar 2.8
Alle in den folgenden Aussagen erwähnten Schemata seien noethersch.

(a) *Eine abgeschlossene Einbettung ist eigentlich.*
(b) *Die Komposition zweier eigentlicher Morphismen ist eigentlich.*
(c) *Eigentliche Morphismen sind stabil unter Basiserweiterung.*
(d) *Falls $f : X \to Y$ und $f' : X' \to Y'$ eigentliche Morphismen von Schemata über einem Basisschema S sind, so ist der Produktmorphismus $f \times f' : X \times_S X' \to Y \times_S Y'$ ebenfalls eigentlich.*

Beweis: Siehe Hartshorne [Ha] Chapter II, Corollary 4.8 .

Wir werden hauptsächlich an der Situation eines abgeschlossenen Unterschemas in einem projektiven Raum interessiert sein. Deshalb wollen wir uns nun der Frage nach „eigentlich“ in dieser Situation zuwenden.

Satz 2.9
Sei R ein noetherscher Ring und n eine natürliche Zahl. Dann ist $\mathbf{P}^n_R$, der projektive Raum über R eigentlich über R.

Beweis: Vergleiche Hartshorne [Ha] Chapter II, Theorem 4.9 .

Somit erhält man, daß auch ein Produkt von projektiven Räumen über R eigentlich über R ist. Weiter ist ein abgeschlossenes Unterschema eines Produkts von $\mathbf{P}^n_R$ eigentlich über R.

2.2 Flache Morphismen

Hier soll kurz der Begriff eines flachen Morphismus vorgestellt werden. Betrachtet man die Fasern eines flachen Morphismus, so erhält man eine flache Familie von Schemata. Dies ist die algebraische Formulierung der intuitiven Idee einer „stetigen Familie von Schemata“. Wir wollen uns auf die im folgenden benötigten Eigenschaften von Flachheit beschränken.

Zur Vorbereitung sei zunächst an die Definition eines flachen Moduls erinnert.

Definition 2.10
Sei A ein Ring und M ein A-Modul. M heißt *flach über* A, falls der Tensorfunktor $N \mapsto M \otimes_A N$ ein exakter Funktor für A-Module N ist.

Satz 2.11
Ein A-Modul M ist flach genau dann, wenn für jedes endlich erzeugte Ideal $I \subset A$ die Abbildung $I \otimes M \to M$ injektiv ist.

Beweis: Siehe Bourbaki [Bo], Chapter I, Section 3, Proposition 1 .

Korollar 2.12
Sei A ein Hauptidealring. Ein A-Modul M ist flach über A genau dann, wenn M torsionsfrei ist.

Beweis:
Nach Satz 2.11 muß man prüfen, ob für jedes Ideal $I \subset A$ die Abbildung $I \otimes M \to M$ injektiv ist. Da aber I Hauptideal ist, also etwa von t erzeugt wird, ist die Injektivität äquivalent zu der Aussage $t\,m \neq 0$ für $0 \neq m \in M$. Damit folgt die Behauptung. □

Die Definition eines flachen Morphismus beruht nun auf der eines flachen Moduls.

Definition 2.13
Sei $f : X \to Y$ ein Morphismus von Schemata und sei $\mathcal{F}$ ein $\mathcal{O}_X$-Modul. $\mathcal{F}$ heißt *flach über Y an einem Punkt* $x \in X$, wenn der Halm $\mathcal{F}_x$ ein flacher $\mathcal{O}_{Y,y}$-Modul ist, wobei $y = f(x)$ und $\mathcal{F}_x$ durch die natürliche Abbildung $f^\# : \mathcal{O}_{Y,y} \to \mathcal{O}_{X,x}$ ein $\mathcal{O}_{Y,y}$-Modul ist. Wir sagen $\mathcal{F}$ ist *flach über* Y, wenn $\mathcal{F}$ an jedem Punkt flach über Y ist. X heißt *flach über* Y, wenn $\mathcal{O}_X$ flach über Y ist.

Satz 2.14
Sei A ein Hauptidealring mit Quotientenkörper K und X ein integres A-Schema, dessen generische Faser $X_K := X \otimes_A K$ nicht leer ist. Dann ist X flach über A.

Beweis:
Mit A ist auch $A_{\mathcal{P}}$ Hauptidealring für jedes Primideal $\mathcal{P}$. Also genügt es nach Korollar 2.12 zu zeigen, daß für jedes $x \in X$ oberhalb von $\mathcal{P}$, der lokale Ring $\mathcal{O}_{X,x}$ torsionsfrei als $A_{\mathcal{P}}$-Modul ist.

Sei *Spec* B eine affine Umgebung von x und $\mathcal{Q}$ das zu x gehörige Primideal in B. Der Morphismus *Spec* $B \rightarrow$ *Spec* A sei gegeben durch $\phi : A \rightarrow B$. Da X integer ist, ist B Integritätsring. Sei nun $\frac{b}{t} \in B_{\mathcal{Q}}$ und $\frac{a}{s} \in A_{\mathcal{P}}$. Falls $\frac{b}{t}\ \phi(\frac{a}{s}) = 0$ in $B_{\mathcal{Q}}$ ist, so folgt $b\ \phi(a) = 0$ in B, also entweder $b = 0$ oder $\phi(a) = 0$ in B. Also genügt es zu zeigen, daß $\phi : A \rightarrow B$ injektiv ist.

Da die generische Faser X_K nicht leer ist, liegt das Primideal $(0) \subset B$ über $(0) \subset A$ und man hat den Ringmorphismus $A_{(0)} = K \hookrightarrow B_{(0)} = \mathrm{Quot}\,(B)$. Dieser ist injektiv. Da außerdem $A \hookrightarrow K$ injektiv ist und das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} B & \longrightarrow & B_{(0)} = \mathrm{Quot}\,(B) \\ \phi \big\uparrow & & \big\uparrow \phi \\ A & \longrightarrow & A_{(0)} = K \end{array}$$

kommutiert, folgt $\phi : A \rightarrow B$ ist injektiv. □

2.3 Glattheit und Regularität

Aus der Analysis ist die Idee der Mannigfaltigkeit vertraut. In der Algebraischen Geometrie gibt es für die gleiche Vorstellung die beiden Begriffe Glattheit und Regularität. Glattheit ist eine relative Eigenschaft, das heißt eine Eigenschaft von Morphismen von Schemata. Demgegenüber ist Regularität eine Eigenschaft von Schemata, die jedoch leider etwas unhandlich ist. Wir wollen zunächst auf die Glattheit eingehen.

Definition 2.15
Ein Morphismus $f : X \rightarrow S$ von Schemata X und S heißt *glatt von relativer Dimension* r in einem Punkt $x \in X$, falls es eine offene Umgebung U von x und eine S-Einbettung

$$j : \ U \hookrightarrow \mathbf{A}^n_S$$

von U in einen linearen Raum $\mathbf{A}^n_S$ mit folgenden Eigenschaften gibt:

(a) die Idealgarbe, die $j(U)$ als Unterschema von $\mathbf{A}^n_S$ definiert, wird lokal bei $y := j(x)$ von $n - r$ Schnitten $g_{r+1}, \ldots, g_n$ erzeugt und

(b) die Differentiale $dg_{r+1}, \ldots, dg_n$ sind linear unabhängig über dem Restklassenkörper $k(y)$.

Ein Morphismus heißt *glatt*, falls er in allen Punkten glatt ist.
(Vergleiche Bosch, Lütkebohmert, Raynaud [BLR], Chapter 2.2, Definition 3 .)

Beispiel 2.15.1
Die Räume $\mathbf{A}^n_S$ und $\mathbf{P}^n_S$ sind glatt über S von relativer Dimension n.

Für die Glattheit von Morphismen hat man folgendes Kriterium.

Satz 2.16 (Jacobi-Kriterium)
Seien X und Z Schemata über S und $j : X \hookrightarrow Z$ eine abgeschlossene Einbettung. Die Idealgarbe $\mathcal{I}$ von $\mathcal{O}_Z$, welche X als Unterschema von Z definiert, sei lokal durch endlich viele Schnitte erzeugt. Sei x ein Punkt von X und $z := j(x)$. Z sei als S-Schema glatt in z von relativer Dimension n. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(a) *Als S-Schema ist X glatt in x von relativer Dimension r.*
(b) *Es gibt lokale Schnitte $g_{r+1}, \ldots, g_n$ von $\mathcal{O}_Z$, die $\mathcal{I}_z$ erzeugen, so daß die Differentiale $dg_{r+1}(z), \ldots, dg_n(z)$ linear unabhängig über dem Restklassenkörper $k(z)$ sind.*

Beweis: Vergleiche Bosch, Lütkebohmert, Raynaud [BLR], Chapter 2.2, Proposition 7 .

Als nächstes wollen wir uns dem Begriff der Regularität zuwenden.

Definition 2.17
Sei A ein lokaler Ring mit maximalem Ideal $\mathcal{M}$. A heißt *regulär*, falls seine Krull-Dimension gleich der Dimension des Vektorraums $\mathcal{M}/\mathcal{M}^2$ über $A/\mathcal{M}$ ist.

Definition 2.18
Ein Schema X heißt *regulär* in einem Punkt P, falls der lokale Ring $\mathcal{O}_{X,P}$ regulär ist. Andernfalls heißt X in P *singulär*. X heißt *regulär*, falls es in jedem Punkt regulär ist.

Um zu prüfen, ob ein Schema regulär ist, kann man sich auf die abgeschlossenen Punkte beschränken. Denn jeder lokale Ring eines nichtabgeschlossenes Punktes ist Lokalisierung eines lokalen Rings eines abgeschlossenes Punktes an einem Primideal und es gilt der

Satz 2.19
Sei A ein regulärer lokaler Ring. Dann ist jede Lokalisierung von A an einem Primideal ebenfalls regulär.

Beweis: Siehe Matsumura [Ma], Korollar zu Theorem 45, Seite 139 .

Lemma 2.20
Sei A ein noetherscher lokaler Ring mit maximalem Ideal $\mathcal{M}$ und Restklassenkörper k. Dann gilt $\dim_k \mathcal{M}/\mathcal{M}^2 \geq \dim A$.

Beweis: Siehe Atiyah-Macdonald [AM], Chapter 11, Corollary 11.15, Seite 121 .

Satz 2.21
Sei R ein diskreter Bewertungsring mit maximalem Ideal (π) und Restklassenkörper k und X ein integres, noethersches, flaches Schema über R. Sei $P \in X$ ein abgeschlossener Punkt, das heißt $P \in X_k := X \otimes_R k$. Falls X_k in P regulär ist, so ist auch X in P regulär.

Beweis:
Sei $\dim \mathcal{O}_{X_k,P} = n$. Das bedeutet, es gibt eine Kette $\widetilde{\mathcal{P}}_0 \subset \widetilde{\mathcal{P}}_1 \subset \ldots \subset \widetilde{\mathcal{P}}_n =: \widetilde{\mathcal{M}}$ verschiedener Primideale von $\mathcal{O}_{X_k,P}$. Diese kommt wegen $\mathcal{O}_{X_k,P} = \mathcal{O}_{X,P}/\pi\mathcal{O}_{X,P}$ von einer

Kette verschiedener Primideale $\mathcal{P}_0 \subset \mathcal{P}_1 \subset \ldots \subset \mathcal{P}_n =: \mathcal{M}$ von $\mathcal{O}_{X,P}$, wobei $(\pi) \subset \mathcal{P}_0$ ist. Da X integer ist, ist außerdem (0) ein Primideal in $\mathcal{O}_{X,P}$. Nun ist $(0) \neq (\pi)$, denn sonst wäre $\pi = 0$ in $\mathcal{O}_{X,P}$ und damit $\mathcal{O}_{X,P}$ nicht R-torsionsfrei. Dies steht aber nach Korollar 2.12 im Widerspruch zur Flachheit von X über dem diskreten Bewertungsring R. Somit ist $(0) \subset \mathcal{P}_0 \subset \mathcal{P}_1 \subset \ldots \subset \mathcal{P}_n$ eine Kette verschiedener Primideale und es ist $\dim \mathcal{O}_{X,P} \geq n+1$. Also bleibt nach Lemma 2.20 zu zeigen: Die Dimension des $\mathcal{O}_{X,P}/\mathcal{M}$-Vektorraums $\mathcal{M}/\mathcal{M}^2$ ist höchstens $n+1$.

Da $\mathcal{O}_{X_k,P}$ regulär und n-dimensional ist, gilt für den $\mathcal{O}_{X_k,P}/\widetilde{\mathcal{M}}$-Vektorraum $\widetilde{\mathcal{M}}/\widetilde{\mathcal{M}}^2$

$$\widetilde{\mathcal{M}}/\widetilde{\mathcal{M}}^2 \;=\; \bigoplus_{i=1}^{n} \tilde{f}_i \,\left(\mathcal{O}_{X_k,P}/\widetilde{\mathcal{M}}\right)$$

mit Basisvektoren $\tilde{f}_1, \ldots, \tilde{f}_n \in \widetilde{\mathcal{M}}/\widetilde{\mathcal{M}}^2$. Diese besitzen wegen $\widetilde{\mathcal{M}} = \mathcal{M}/\pi\mathcal{O}_{X,P}$ Repräsentanten $f_1{}', \ldots, f_n{}' \in \mathcal{M}$. Sei $f_i := f_i{}' + \mathcal{M}^2 \in \mathcal{M}/\mathcal{M}^2$.

<u>Behauptung:</u> Es ist $\mathcal{M}/\mathcal{M}^2 \;=\; \sum_{i=1}^{n} f_i \;(\mathcal{O}_{X,P}/\mathcal{M}) \;+\; (\pi + \mathcal{M}^2)\;(\mathcal{O}_{X,P}/\mathcal{M})$.

Die Inklusion „$\supset$“ ist klar, da f_i und $\pi + \mathcal{M}^2 \in \mathcal{M}/\mathcal{M}^2$ sind.

Für „$\subset$“ sei $a \in \mathcal{M}$. Dazu sei $\tilde{a} := a + \pi\mathcal{O}_{X,P} \in \widetilde{\mathcal{M}} = \mathcal{M}/\pi\mathcal{O}_{X,P}$. Dann gilt in $\widetilde{\mathcal{M}}/\widetilde{\mathcal{M}}^2$

$$\tilde{a} + \widetilde{\mathcal{M}}^2 \;=\; \sum_{i=1}^{n} \tilde{f}_i\, b_i \qquad \text{für eindeutig bestimmte} \quad b_i \;\in\; \mathcal{O}_{X_k,P}/\widetilde{\mathcal{M}} \;=\; \mathcal{O}_{X,P}/\mathcal{M}.$$

Nach der Wahl von Repräsentanten $b_i{}' \in \mathcal{O}_{X,P}$ für die b_i ist somit in $\mathcal{O}_{X_k,P} = \mathcal{O}_{X,P}/\pi\mathcal{O}_{X,P}$

$$\tilde{a} \;-\; \sum_{i=1}^{n} (f_i{}' + \pi\mathcal{O}_{X,P})\,(b_i{}' + \pi\mathcal{O}_{X,P}) \;=\; \widetilde{m} \;\in\; \widetilde{\mathcal{M}}^2.$$

Wegen $\widetilde{\mathcal{M}}^2 = \mathcal{M}^2/(\mathcal{M}^2 \cap \pi\mathcal{O}_{X,P})$ gibt es einen Repräsentanten $m \in \mathcal{M}^2$ für $\widetilde{m}$. Damit ist

$$a \;-\; \sum_{i=1}^{n} f_i{}'\, b_i{}' \;-\; m \;=\; \pi\, b' \;\in\; \pi\mathcal{O}_{X,P} \qquad \text{für ein} \quad b' \in \mathcal{O}_{X,P}$$

in $\mathcal{O}_{X,P}$. Also erhält man modulo $\mathcal{M}^2$ die folgende Gleichheit, welche „$\subset$“ zeigt:

$$a + \mathcal{M}^2 \;=\; \sum_{i=1}^{n} f_i\, b_i \;+\; (\pi + \mathcal{M}^2)\, b \qquad \text{mit} \quad b \;:=\; b' + \mathcal{M} \;\in\; \mathcal{O}_{X,P}/\mathcal{M}.$$

Somit ist die Dimension des $\mathcal{O}_{X,P}/\mathcal{M}$-Vektorraums $\mathcal{M}/\mathcal{M}^2$ höchstens $n+1$. Dies zeigt, daß $\mathcal{O}_{X,P}$ regulär und damit X in P regulär ist. □

Über das Verhältnis von Glattheit und Regularität gelten folgende Sätze

Satz 2.22
Sei R ein diskreter Bewertungsring mit Quotientenkörper K und Restklassenkörper k. Sei X ein integres R-Schema von endlichem Typ über R, dessen generische Faser $X_K := X \otimes_R K$ nicht leer ist. So ist X ein glattes R-Schema genau dann, wenn $X_K(\bar{K})$ und $X_k(\bar{k})$ keine singulären Punkte enthalten.

Beweis: Siehe Silverman [Si 2], Chapter IV, Proposition 2.9 .

Korollar 2.23
Sei R ein diskreter Bewertungsring mit Quotientenkörper K und Restklassenkörper k. Sei X ein integres, noethersches R-Schema von endlichem Typ über R, dessen generische Faser X_K nicht leer ist. $P \in X_k$ sei ein abgeschlossener Punkt, welcher glatt über R ist. Dann ist X regulär in P.

Beweis:
Aus Satz 2.22 folgt, daß X_k in P regulär ist. Da die generische Faser X_K von X nicht leer ist, ist X flach über R nach Satz 2.14. Wegen Satz 2.21 ist dann auch X regulär in P. $\square$

2.4 Gruppenschemata

Definition 2.24
Sei S ein Schema. Ein *Gruppenschema über S* ist ein S-Schema $\pi : G \to S$ zusammen mit S-Morphismen

$$\sigma_0 : \; S \longrightarrow G, \qquad i : \; G \longrightarrow G, \qquad \mu : \; G \times_S G \longrightarrow G,$$

so daß die folgenden Diagramme kommutieren:

(i) *Einselement*

$$\begin{tikzcd} & G \times_S G \arrow[d, "\mu"] \\ S \times_S G \arrow[ur, "\sigma_0 \times id"] \arrow[r, "pr_2"] & G \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & G \times_S G \arrow[d, "\mu"] \\ G \times_S S \arrow[ur, "id \times \sigma_0"] \arrow[r, "pr_1"] & G \end{tikzcd}$$

(ii) *Inverses*

$$\begin{tikzcd} G \times_S G \arrow[rr, "id \times i"] & & G \times_S G \arrow[d, "\mu"] \\ G \arrow[u, "\Delta"] \arrow[r, "\pi"] & S \arrow[r, "\sigma_0"] & G \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} G \times_S G \arrow[rr, "i \times id"] & & G \times_S G \arrow[d, "\mu"] \\ G \arrow[u, "\Delta"] \arrow[r, "\pi"] & S \arrow[r, "\sigma_0"] & G \end{tikzcd}$$

Hier ist $\Delta : \; G \to G \times_S G$ der Diagonalmorphismus (Definition 1.1).

(iii) *Assoziativität*

$$\begin{tikzcd} G \times_S G \times_S G \arrow[r, "\mu \times id"] \arrow[d, "id \times \mu"'] & G \times_S G \arrow[d, "\mu"] \\ G \times_S G \arrow[r, "\mu"] & G \end{tikzcd}$$

Beispiel 2.24.1
Das *additive Gruppenschema* $\mathbf{G}_a$ *über* $\mathbf{Z}$ ist das Schema $\mathbf{G}_a = Spec\ \mathbf{Z}[T]$. Das Gruppengesetz auf $\mathbf{G}_a$ ist durch

$$Spec\ \mathbf{Z}[T_1, T_2] \;=\; \mathbf{G}_a \times_{\mathbf{Z}} \mathbf{G}_a \quad\longrightarrow\quad \mathbf{G}_a \;=\; Spec\ \mathbf{Z}[T]$$

und den Ringmorphismus $\mathbf{Z}[T] \to \mathbf{Z}[T_1, T_2];\ T \mapsto T_1 + T_2$ induziert. Für jeden Ring R ist $\mathbf{G}_a(R) = R$, wobei das Gruppengesetz durch die Addition in R gegeben ist. Das *additive Gruppenschema* $\mathbf{G}_{a/S}$ über einem beliebigen Schema S ist das Gruppenschema $\mathbf{G}_a \times_{\mathbf{Z}} S$, das man durch Basiserweiterung erhält. Speziell ist $\mathbf{G}_{a/R} = Spec\ R[T]$.

Beispiel 2.24.2
Das *multiplikative Gruppenschema* $\mathbf{G}_m$ *über* $\mathbf{Z}$ ist das Schema $\mathbf{G}_m = Spec\ \mathbf{Z}[T, T^{-1}]$. Das Gruppengesetz auf $\mathbf{G}_m$ ist durch

$$Spec\ \mathbf{Z}[T_1, T_1^{-1}, T_2, T_2^{-1}] \;=\; \mathbf{G}_m \times_{\mathbf{Z}} \mathbf{G}_m \quad\longrightarrow\quad \mathbf{G}_m \;=\; Spec\ \mathbf{Z}[T, T^{-1}]$$

und den Ringmorphismus $\mathbf{Z}[T, T^{-1}] \to \mathbf{Z}[T_1, T_1^{-1}, T_2, T_2^{-1}];\ T \mapsto T_1T_2$ induziert. Für jeden Ring R ist $\mathbf{G}_m(R) = R^{\times}$, wobei das Gruppengesetz durch die Multiplikation in $R^{\times}$ gegeben ist. Das *multiplikative Gruppenschema* $\mathbf{G}_{m/S}$ über einem beliebigen Schema S ist das Gruppenschema $\mathbf{G}_m \times_{\mathbf{Z}} S$, das man durch Basiserweiterung erhält. Speziell ist $\mathbf{G}_{m/R} = Spec\ R[T, T^{-1}]$.

Beispiel 2.24.3
Im nächsten Abschnitt wird ein weiteres Beispiel für ein Gruppenschema gegeben. Jede elliptische Kurve E/K über einem Körper K ist ein Gruppenschema über K. (Siehe Satz 2.26)

2.5 Elliptische Kurven

Hier sollen nur kurz einige, im folgenden unmittelbar benötigte Tatsachen über elliptische Kurven erwähnt werden. Für eine gründliche Einführung sei auf die Bücher von Silverman [Si 1] und Husemöller [Hu] über elliptische Kurven verwiesen.

Definition 2.25
Sei K ein Körper. Eine *elliptische Kurve über* K ist eine glatte kubische Kurve $E \subset \mathbf{P}^2_K$, die durch eine *Weierstraß-Gleichung*

$$Y^2Z + a_1XYZ + a_3YZ^2 \;=\; X^3 + a_2X^2Z + a_4XZ^2 + a_6Z^3$$

mit Koeffizienten $a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_6 \in K$ gegeben ist.

Der elliptischen Kurve E werden folgende Größen zugeordnet:

$$\begin{aligned} b_2 &= a_1^2 + 4a_2, \qquad b_4 = a_1a_3 + 2a_4, \qquad b_6 = a_3^2 + 4a_6, \\ b_8 &= a_1^2a_6 + 4a_2a_6 - a_1a_3a_4 + a_2a_3^2 - a_4^2 = (b_2b_6 - b_4^2)/4, \\ \Delta &= -b_2^2b_8 - 8b_4^3 - 27b_6^2 + 9b_2b_4b_6. \end{aligned}$$

Δ heißt die *Diskriminante von* E.

Satz 2.26
Sei K ein Körper und E/K eine elliptische Kurve über K. Dann ist E ein Gruppenschema über K.

Beweis: Vergleiche Silverman [Si 1] Chapter III, Section 3, speziell Theorem 3.6 und Proposition 3.1 .

Satz 2.27
Sei k ein perfekter Körper und E eine kubische Kurve in $\mathbf{P}_k^2$, gegeben durch die Gleichung

$$F(X,Y,Z) \;=\; Y^2Z + a_1XYZ + a_3YZ^2 - X^3 - a_2X^2Z - a_4XZ^2 - a_6Z^3 \;=\; 0.$$

Dann gilt:

(a) *Ist die Diskriminante $\Delta \neq 0$, so ist E glatt und eine elliptische Kurve über k.*

(b) *Ist die Diskriminante $\Delta = 0$, so gibt es genau einen Punkt von E, der nicht glatt über k ist. Dieser ist k-wertig.*

Beweis:
Nach dem Jacobi-Kriterium (2.16) hat man die partiellen Ableitungen von F zu betrachten.

Der Punkt mit den Koordinaten $X = Z = 0$ ist glatt über k, da dort $Y \neq 0$ und $\frac{\partial F}{\partial Z}(0,1,0) = 1 \neq 0$ ist.

Für die restlichen Punkte sei $x := \frac{X}{Z}$, $y := \frac{Y}{Z}$ und $f := F(x,y,1)$. Dann ist

$$\begin{aligned} f &= y^2 + a_1xy + a_3y - x^3 - a_2x^2 - a_4x - a_6, \\ \frac{\partial f}{\partial x} &= a_1y - 3x^2 - 2a_2x - a_4, \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 2y + a_1x + a_3. \end{aligned}$$

Wir unterscheiden nun zwei Fälle:

1. $\text{char}(k) = 2$
In diesem Fall ist

$$\begin{gathered} b_2 = a_1^2, \qquad b_4 = a_1a_3, \qquad b_6 = a_3^2, \\ b_8 = a_1^2a_6 + a_1a_3a_4 + a_2a_3^2 + a_4^2 \qquad \text{und} \\ \Delta = a_1^6a_6 + a_1^5a_3a_4 + a_1^4a_2a_3^2 + a_1^4a_4^2 + a_1^3a_3^3 + a_3^4. \end{gathered}$$

Falls $a_1 \neq 0$, so folgt aus $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$, daß $x = \frac{a_3}{a_1} \in k$ und $y = \frac{a_3^2}{a_1^3} + \frac{a_4}{a_1} \in k$ der einzige nicht glatte Punkt sein könnte. In f eingesetzt ergibt dies wegen $a_1xy + a_3y = 0$

$$\frac{a_3^4}{a_1^6} + \frac{a_4^2}{a_1^2} + \frac{a_3^3}{a_1^3} + \frac{a_2a_3^2}{a_1^2} + \frac{a_3a_4}{a_1} + a_6 \;=\; \frac{\Delta}{a_1^6}.$$

(a) $\Delta \neq 0 \Rightarrow$ der Punkt $x = \dfrac{a_3}{a_1}$, $y = \dfrac{a_3^2}{a_1^3} + \dfrac{a_4}{a_1}$ liegt nicht auf E. Somit ist E glatt über k und eine elliptische Kurve.

(b) $\Delta = 0 \Rightarrow$ der einzige singuläre Punkt auf E ist der k-wertige Punkt mit den Koordinaten $x = \dfrac{a_3}{a_1}$, $y = \dfrac{a_3^2}{a_1^3} + \dfrac{a_4}{a_1}$.

Falls $a_1 = 0$, so folgt im Fall (a) aus $\Delta \neq 0$, daß auch $a_3 \neq 0$ ist. Somit ist $\dfrac{\partial f}{\partial y} = a_3 \neq 0$ und E ist glatt.
Im Fall (b) folgt aus $\Delta = 0$, daß auch $a_3 = 0$ ist. Somit ist $\dfrac{\partial f}{\partial y} = a_3 = 0$ für alle x, y. Wegen $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 0$ ist dann $x^2 = a_4$. Da k perfekt ist, gilt $x = \sqrt{a_4} \in k$. Dies ist der einzige in Frage kommende x-Wert. In f eingesetzt erhält man $y^2 = a_2a_4 + a_6$. Da k perfekt ist, ist $y = \sqrt{a_2a_4 + a_6} \in k$. Der einzige nicht glatte Punkt von E/k ist also $x = \sqrt{a_4}$, $y = \sqrt{a_2a_4 + a_6}$ und dieser ist k-wertig.

2. char$(k) \neq 2$

Aus $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$ folgt $y = -\dfrac{a_1x + a_3}{2}$. In f und $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ eingesetzt, ergibt dies

$$\begin{aligned} x^3 + \frac{a_1^2 + 4a_2}{4}x^2 + \frac{a_1a_3 + 2a_4}{2}x + \frac{a_3^2 + 4a_6}{4} &= x^3 + \frac{b_2}{4}x^2 + \frac{b_4}{2}x + \frac{b_6}{4} =: P = 0, \\ 3x^2 + \frac{a_1^2 + 4a_2}{2}x + \frac{a_1a_3 + 2a_4}{2} &= 3x^2 + \frac{b_2}{2}x + \frac{b_4}{2} = P' = 0. \end{aligned}$$

Die Diskriminante von P ist wegen $4b_8 = b_2b_6 - b_4^2$ gleich $\dfrac{\Delta}{16}$.

(a) $\Delta \neq 0 \Rightarrow P$ hat nur einfache Nullstellen. Das bedeutet, daß P und P' keine gemeinsame Nullstelle haben. Somit ist E glatt über k und eine elliptische Kurve.

(b) $\Delta = 0 \Rightarrow P$ hat genau eine mehrfache Nullstelle, da sein Grad gleich drei ist. Diese ist gemeinsame Nullstelle von P und P'. Da k perfekt ist, liegt sie in k. Somit gibt es genau einen Punkt von E, der nicht glatt über k ist und dieser ist k-wertig. $\square$

Satz 2.28
Sei K ein Körper und E eine elliptische Kurve in $\mathbf{P}_K^2$, gegeben durch die Gleichung

$$F(X,Y,Z) = Y^2Z + a_1XYZ + a_3YZ^2 - X^3 - a_2X^2Z - a_4XZ^2 - a_6Z^3 = 0.$$

Eine zulässige Variablentransformation *der elliptischen Kurve ist von der Form*

$$X = u^2\bar{X} + r\bar{Z}, \qquad Y = u^3\bar{Y} + su^2\bar{X} + t\bar{Z} \qquad \text{und} \qquad Z = \bar{Z},$$

mit $s, r, t \in K$ und $u \in K^\times$. Sie führt E über in die zu E isomorphe elliptische Kurve $\bar{E} \subset \mathbf{P}_K^2$ mit der Gleichung

$$\bar{F}(\bar{X},\bar{Y},\bar{Z}) = \bar{Y}^2\bar{Z} + \bar{a}_1\bar{X}\bar{Y}\bar{Z} + \bar{a}_3\bar{Y}\bar{Z}^2 - \bar{X}^3 - \bar{a}_2\bar{X}^2\bar{Z} - \bar{a}_4\bar{X}\bar{Z}^2 - \bar{a}_6\bar{Z}^3 = 0,$$

wobei die $\bar{a}_i$ und die Diskriminante $\bar{\Delta}$ von $\bar{E}$ durch die folgenden Umrechnungen gegeben sind

$$\begin{aligned} u\,\bar{a}_1 &= a_1 + 2s, \\ u^2\bar{a}_2 &= a_2 - sa_1 + 3r - s^2, \\ u^3\bar{a}_3 &= a_3 + ra_1 + 2t, \\ u^4\bar{a}_4 &= a_4 - sa_3 + 2ra_2 - (t+rs)a_1 + 3r^2 - 2st, \\ u^6\bar{a}_6 &= a_6 + ra_4 + r^2a_2 + r^3 - ta_3 - rta_1 - t^2, \\ u^{12}\bar{\Delta} &= \Delta. \end{aligned}$$

Beweis: Siehe Husemöller [Hu], Chapter 3, Remarks 2.4 und 3.2 .

Satz 2.29
Sei k ein Körper und E eine kubische Kurve in $\mathbf{P}_k^2$, gegeben durch die Gleichung

$$F = Y^2Z + a_1XYZ - X^3 - a_2X^2Z = 0,$$

welche wir über dem Körper $k' = k(\alpha) = k(\beta)$ in $(Y-\alpha X)(Y-\beta X)Z = X^3$ faktorisieren. E enthält einen einzigen singulären Punkt, nämlich $X = Y = 0$. Somit gilt für das offene Unterschema E_{ns} der nichtsingulären Punkte von E:

$$E_{ns} = Spec\left(k[X,Y,Z]/(F)\right)_{(Y^2+a_1XY-a_2X^2)},$$

wobei $\left(k[X,Y,Z]/(F)\right)_{(Y^2+a_1XY-a_2X^2)}$ der Unterring der Elemente von Grad Null in $k[X,Y,Z,\frac{1}{Y^2+a_1XY-a_2X^2}]/(F)$ ist. Es gilt:

1. *Multiplikative Reduktion falls $\alpha \neq \beta$: Der Ringmorphismus*

   $$k'[T,T^{-1}] \longrightarrow \left(k'[X,Y,Z]/(F)\right)_{(Y-\alpha X)(Y-\beta X)}; \quad T \mapsto \frac{Y-\beta X}{Y-\alpha X}$$

   definiert einen Isomorphismus $E_{ns} \to \mathbf{G}_{m/k'}$ über k'.

   (a) *split, falls $k' = k$, das heißt $\alpha, \beta \in k$: Die Abbildung $E_{ns}(k) \to \mathbf{G}_{m/k}(k) = k^{\times}$ ist ein Isomorphismus auf die multiplikative Gruppe von k.*

   (b) *non-split, falls $k' \neq k$, das heißt $\alpha, \beta \notin k$: Die Abbildung definiert einen Isomorphismus $E_{ns}(k) \to \{a \in k' : N_k^{k'}(a) = 1\}$ auf die multiplikative Gruppe der Elemente von k' mit Norm 1 über k.*

2. *Additive Reduktion falls $\alpha = \beta$: Der Ringmorphismus*

   $$k'[T] \longrightarrow \left(k'[X,Y,Z]/(F)\right)_{(Y-\alpha X)(Y-\beta X)}; \quad T \mapsto \frac{X}{Y-\alpha X}$$

   definiert einen Isomorphismus $E_{ns} \to \mathbf{G}_{a/k'}$ über k'. Die Abbildung $E_{ns}(k') \to \mathbf{G}_a(k') = k'$ ist ein Isomorphismus auf die additive Gruppe von k'. Man beachte, daß bei perfektem Körper k gilt $k' = k$.

<u>Beweis:</u>
Nach Satz 2.27 hat E einen einzigen singulären Punkt, nämlich $X = Y = 0$.

Im multiplikativen Fall führen wir die neuen Variablen

$$u \;=\; \frac{Y-\beta X}{Y-\alpha X} \qquad \text{und} \qquad v \;=\; \frac{Z}{Y-\alpha X}.$$

ein. Mit der Gleichheit

$$(Y-\alpha X)^3(u-1)^3 \;=\; (\alpha-\beta)^3X^3 \;=\; (\alpha-\beta)^3(Y-\alpha X)(Y-\beta X)Z$$

erhält man als Gleichung für E_{ns} in (u, v)-Koordinaten $(\alpha-\beta)^3uv = (u-1)^3$. Dabei werden Geraden in X, Y, Z mit Gleichung $AX + BY + CZ = 0$ in Geraden in u, v mit Gleichung $A'u + B'v + C' = 0$ transformiert, wobei

$$A \;=\; -\alpha C' - \beta A', \qquad B \;=\; A' + C', \qquad \text{und} \qquad C \;=\; B' \qquad \text{ist.}$$

Dies bedeutet, daß Geraden, die nicht durch den Punkt $X = Y = 0$ gehen, $B' = C \neq 0$ in k' haben. Falls nun $(u_1, v_1), (u_2, v_2)$ und (u_3, v_3) drei Punkte von E_{ns} sind, die auf der Geraden $v = \lambda u + \delta$ liegen, so faktorisiert man

$$0 \;=\; (u-1)^3 - (\alpha-\beta)^3u(\lambda u + \delta) \;=\; (u-u_1)(u-u_2)(u-u_3)$$

und erhält somit $u_1u_2u_3 = 1$ in der multiplikativen Gruppe. Das Einselement $X = Z = 0$ von E_{ns} wird auf $u = 1$ abgebildet. Das bedeutet, daß die Zuordnung $T \mapsto u$ das Gruppengesetz von E_{ns} in das Gruppengesetz von $\mathbf{G}_{m/k'}$ überführt.

Durch die Zuordnung

$$\frac{X}{Y-\alpha X} \;=\; \frac{u-1}{\alpha-\beta}, \qquad \frac{Y}{Y-\alpha X} \;=\; \frac{\alpha u-\beta}{\alpha-\beta} \qquad \text{und} \qquad \frac{Z}{Y-\alpha X} \;=\; \frac{1}{u}\left(\frac{u-1}{\alpha-\beta}\right)^3$$

ist der inverse Morphismus gegeben. Dies zeigt, daß $E_{ns} \to \mathbf{G}_{m/k'}$ ein Isomorphismus ist. Insbesondere ist $E_{ns}(k') \cong \mathbf{G}_{m/k'}(k')$ ein Isomorphismus von Gruppen.

Falls nun $k' \neq k$ ist, so haben die Elemente $u = \dfrac{Y-\beta X}{Y-\alpha X} \in k'$ für $X, Y \in k$ die Norm

$$\mathrm{N}_k^{k'}(u) \;=\; u\,u' \;=\; \frac{Y-\beta X}{Y-\alpha X}\cdot\frac{Y-\alpha X}{Y-\beta X} \;=\; 1,$$

da $\alpha' = \beta$ und $\beta' = \alpha$ die Konjugierten von einander in k' über k sind. Umgekehrt sei $a \in k'$ mit Norm 1. Dann gibt es ein $c \in k'$, so daß $w = c + ac' \neq 0$ ist und aus $w' = c' + a'c$ folgt

$$a\,w' \;=\; a\,c' + a\,a'\,c \;=\; c + a\,c' \;=\; w.$$

Somit ist $a = \dfrac{w}{w'} = \dfrac{Y-\beta X}{Y-\alpha X}$ mit $X, Y \in k$, da $w \in k' = k(\beta)$. Damit ist 1. bewiesen.

Im additiven Fall führen wir die neuen Variablen

$$u \;=\; \frac{X}{Y-\alpha X} \qquad \text{und} \qquad v \;=\; \frac{Z}{Y-\alpha X}.$$

ein. Mit der Gleichheit

$$(Y-\alpha X)^2 Z \;=\; X^3 \;=\; (Y-\alpha X)^3 u^3$$

erhält man als Gleichung für E_{ns} in (u,v)-Koordinaten $v=u^3$. Dabei werden Geraden in X,Y,Z mit Gleichung $AX+BY+CZ=0$ in Geraden in u,v mit Gleichung $A'u+B'v+C'=0$ transformiert, wobei

$$A \;=\; A'-\alpha C', \qquad B \;=\; C', \qquad \text{und} \qquad C \;=\; B' \qquad \text{ist.}$$

Dies bedeutet, daß Geraden, die nicht durch den Punkt $X=Y=0$ gehen, $B'=C\neq 0$ in k' haben. Falls nun $(u_1,v_1),(u_2,v_2)$ und (u_3,v_3) drei Punkte von E_{ns} sind, die auf der Geraden $v=\lambda u+\delta$ liegen, so faktorisiert man

$$0 \;=\; u^3-(\lambda u+\delta) \;=\; (u-u_1)(u-u_2)(u-u_3)$$

und erhält somit $u_1+u_2+u_3=0$ in der additiven Gruppe. Das Einselement $X=Z=0$ von E_{ns} wird auf $u=0$ abgebildet. Das bedeutet, daß die Zuordnung $T\mapsto u$ das Gruppengesetz von E_{ns} in das Gruppengesetz von $\mathbf{G}_{a/k'}$ überführt.

Durch die Zuordnung

$$\frac{X}{Y-\alpha X} \;=\; u, \qquad \frac{Y}{Y-\alpha X} \;=\; 1+\alpha u \qquad \text{und} \qquad \frac{Z}{Y-\alpha X} \;=\; u^3$$

ist der inverse Morphismus gegeben. Dies zeigt, daß $E_{ns}\to\mathbf{G}_{a/k'}$ ein Isomorphismus ist. Insbesondere ist $E_{ns}(k')\cong\mathbf{G}_{a/k'}(k')$ ein Isomorphismus von Gruppen. □

2.6 Aufblasungen

Beim Beweis des Algorithmus von Tate sind Aufblasungen das wesentliche Instrument, mit dem das Néron-Modell konstruiert wird. Deshalb soll hier eine kurze Einführung dazu gegeben werden.

Konstruktion 2.30
Sei X ein noethersches Schema und $\mathcal{I}$ eine kohärente Idealgarbe auf X. Man betrachte die Garbe $\mathcal{S}=\bigoplus_{d\geq 0}\mathcal{I}^d$ von graduierten $\mathcal{O}_X$-Algebras, wobei $\mathcal{I}^0=\mathcal{O}_X$ und $\mathcal{I}^d$ die d-fache Tensorpotenz von $\mathcal{I}$ ist.

Für jede offene affine Teilmenge $U=\mathit{Spec}\ A$ von X sei $\mathcal{S}(U)$ die graduierte A-Algebra $\Gamma(U,\mathcal{S}|_U)$. Dann betrachte man $\mathit{Proj}\ \mathcal{S}(U)$ und den durch $A\to\mathcal{S}(U)$ gegebenen Morphismus $\phi_U:\mathit{Proj}\ \mathcal{S}(U)\to U$. Falls $f\in A$ und $U_f=\mathit{Spec}\ A_f$, so ist $\mathit{Proj}\ \mathcal{S}(U_f)\cong\phi_U^{-1}(U_f)$, da $\mathcal{S}$ quasi-kohärent ist. Es folgt damit, wenn U,V offene affine Teilmengen von X sind, daß $\phi_U^{-1}(U\cap V)$ natürlich isomorph zu $\phi_V^{-1}(U\cap V)$ ist. Diese Isomorphismen gestatten es, die Schemata $\mathit{Proj}\ \mathcal{S}(U)$ zusammenzukleben. Man erhält ein Schema $\mathbf{Proj}\ \mathcal{S}$ zusammen mit einem Morphismus $\phi:\mathbf{Proj}\ \mathcal{S}\to X$, so daß für jede offene affine Teilmenge $U\subset X$ gilt $\phi^{-1}(U)\cong\mathit{Proj}\ \mathcal{S}(U)$.
(Vergleiche Hartshorne [Ha], Chapter II.7 Construction, Seite 160 .)

$\widetilde{X}:=\mathbf{Proj}\ \mathcal{S}$ heißt die *Aufblasung ('Blowing up') von X bezüglich der kohärenten Idealgarbe $\mathcal{I}$*. Falls Y das zu $\mathcal{I}$ gehörende abgeschlossene Unterschema von X ist, heißt $\widetilde{X}$ auch die *Aufblasung von X entlang Y*.

Satz 2.31
Sei X ein noethersches Schema, $\mathcal{I}$ eine kohärente Idealgarbe und sei $\phi : \widetilde{X} \to X$ die Aufblasung von $\mathcal{I}$. Sei Y das zu $\mathcal{I}$ gehörende abgeschlossene Unterschema von X und $U = X - Y$. Dann ist $\phi : \phi^{-1}(U) \longrightarrow U$ ein Isomorphismus.

Beweis:
Es ist $\mathcal{I}|_U \cong \mathcal{O}_U$ und somit $\phi^{-1}(U) = \mathbf{Proj}\ \mathcal{O}_U[T] = U$. (Siehe Hartshorne [Ha], Chapter II, Proposition 7.13 .) □

Bemerkung 2.31.1
Eine direkte Konsequenz dieses Satzes ist folgende nützliche Eigenschaft von Aufblasungen. Falls man statt des Schemas X ein offenes Unterschema X' mit $Y \subset X'$ aufbläst und diese Aufblasung dann entlang $\phi'^{-1}(X' - Y) \cong X' - Y$ mit X zusammenklebt, so erhält man das gleiche Schema wie das, welches man durch Aufblasung von X entlang Y bekäme. Dies gestattet es, das aufzublasende Schema vorher sozusagen „zurechtzuschneiden", um die Aufblasung einfacher zu machen.

Satz 2.32
Sei Y abgeschlossenes Unterschema eines noetherschen Schemas X und V ein abgeschlossenes Unterschema von Y. Sei $\phi : \widetilde{X} \to X$ die Aufblasung von X entlang V und sei $\psi : \widetilde{Y} \to Y$ die Aufblasung von Y entlang V. Dann ist $\widetilde{Y}$ ein abgeschlossenes Unterschema von $\widetilde{X}$ und $\psi = \phi|_{\widetilde{Y}}$. $\widetilde{Y}$ heißt dann die strikte Transformation *von Y unter der Aufblasung $\phi : \widetilde{X} \to X$. Falls insbesondere Y irreduzibel und V echte Teilmenge von Y ist, so erhält man $\widetilde{Y}$ als den Abschluß $\widetilde{Y} = \overline{\phi^{-1}(Y - V)}$ in $\widetilde{X}$.*

Beweis: Vergleiche Hartshorne [Ha], Chapter II, Proposition 7.15 .

Kapitel 3

Das Néron-Modell

Sei R ein diskreter Bewertungsring mit Quotientenkörper K und E/K eine elliptische Kurve, die durch eine Weierstraß-Gleichung mit Koeffizienten aus R gegeben ist. Diese Weierstraß-Gleichung definiert ein abgeschlossenes Unterschema $\mathcal{W} \subset \mathbf{P}^2_R$. Dieses ist eigentlich über R und folglich liftet jeder Punkt von $E(K)$ eindeutig zu einem Punkt in $\mathcal{W}(R)$.

Eine weitere wichtige Eigenschaft der elliptischen Kurve E ist, daß sie ein Gruppenschema ist. Das Gruppengesetz dehnt sich zu einer rationalen Abbildung $\mathcal{W} \times_R \mathcal{W} - - -> \mathcal{W}$ aus, die aber im allgemeinen kein Morphismus ist. Somit ist $\mathcal{W}$ nicht notwendig ein Gruppenschema über R. Nimmt man stattdessen den glatten Ort $\mathcal{W}^0$ von $\mathcal{W}$ über R, so erhällt man ein R-Gruppenschema. Doch leider hat man dabei obige Punkt-Liftungs-Eigenschaft verloren.

Ein Néron-Modell für E/K ist nun ein Schema $\mathcal{E}/R$, das sowohl ein R-Gruppenschema ist, als auch die Punkt-Liftungs-Eigenschaft hat. Wir wollen seine Definition angeben und kurz auf seine Existenz eingehen.

3.1 Definition

Definition 3.1
Sei R ein Dedekindring mit Quotientenkörper K und sei E/K eine elliptische Kurve. Ein *Néron-Modell für E/K* ist ein glattes, separiertes Schema $\mathcal{E}/R$ von endlichem Typ über R, dessen generische Faser gleich E/K ist und das die folgende universelle Eigenschaft erfüllt, die *Néron Mapping Property* genannt wird:

> Sei $\mathcal{X}/R$ ein glattes R-Schema mit generischer Faser X/K und sei $\phi_K : X_{/K} \to E_{/K}$ ein K-Morphismus. Dann existiert genau ein R-Morphismus $\phi_R : \mathcal{X}_{/R} \to \mathcal{E}_{/R}$, der ϕ_K fortsetzt. $\left(\begin{array}{c}\textit{Néron}\\ \textit{Mapping}\\ \textit{Property}\end{array}\right)$

Bemerkung 3.1.1
Das Néron-Modell $\mathcal{E}(R)$ für E/K ist ein Gruppenschema.
(Siehe Bosch, Lütkebohmert, Raynaud [BLR], Chapter 4.3, Theorem 6 und Chapter 4.4, Corollary 4 .)

Bemerkung 3.1.2
Der wichtigste Fall der Néron Mapping Property ist $\mathcal{X} = Spec\ R$ und $X = Spec\ K$. Dann ist die Menge der K-Abbildungen genau gleich der Gruppe der K-rationalen Punkte $E(K)$ und die Menge der R-Morphismen gleich der Gruppe der R-rationalen Punkte $\mathcal{E}(R)$. Also besagt die Néron Mapping Property, daß die natürliche Abbildung

$$\mathcal{E}(R) \longrightarrow E(K)$$

surjektiv ist. Da $\mathcal{E}$ über R separiert ist, ist sie eine Bijektion.

Satz 3.2
Sei R ein diskreter Bewertungsring mit Quotientenkörper K und E/K eine elliptische Kurve, die durch eine minimale Weierstraß-Gleichung

$$Y^2Z + a_1XYZ + a_3YZ^2 = X^3 + a_2X^2Z + a_4XZ^2 + a_6Z^3$$

mit Koeffizienten in R gegeben ist. Diese Weierstraß-Gleichung definiert ein Schema $\mathcal{W} \subset \mathbf{P}^2_R$. Sei $\mathcal{W}^0 \subset \mathcal{W}$ das größte Unterschema von $\mathcal{W}$, welches glatt über R ist. Dann gilt:

(a) *Sowohl $\mathcal{W}/R$ als auch $\mathcal{W}^0/R$ haben generische Faser E/K.*

(b) *Der Additions- und Inversions-Morphismus von E setzen sich fort zu R-Morphismen*

$$\mathcal{W}^0 \times_R \mathcal{W}^0 \longrightarrow \mathcal{W}^0 \qquad \textit{und} \qquad \mathcal{W}^0 \longrightarrow \mathcal{W}^0,$$

die $\mathcal{W}^0$ zu einem Gruppenschema über R machen.

<u>Beweis:</u>
Vergleiche Silverman [Si 2], Chapter IV, Theorem 5.3 .

Ad a)
Aufgrund der Sätze 2.22 und 2.27 ist $\mathcal{W}^0$ entweder gleich $\mathcal{W}$ oder $\mathcal{W}^0$ ist $\mathcal{W}$ minus einen Punkt der speziellen Faser. Damit folgt Behauptung a).

Ad b)
Die Addition und Invertierung auf E/K induzieren rationale Abbildungen

$$\mu: \ \mathcal{W} \times_R \mathcal{W} \ - - -> \ \mathcal{W} \qquad \text{und} \qquad i: \ \mathcal{W} \ - - -> \ \mathcal{W}.$$

Diese erfüllen die Gruppenaxiome auf dem offenen dichten Unterschema $E \subset \mathcal{W}$, da E ein Gruppenschema ist. Deshalb erfüllen sie die Gruppenaxiome auf dem größten offenen Unterschema, auf dem sie definiert sind. Eine längere Rechnung (Silverman [Si 2], Chapter IV, Theorem 5.3) zeigt nun, daß dieses $\mathcal{W}^0$ enthält und

$$\mu: \ \mathcal{W}^0 \times_R \mathcal{W}^0 \longrightarrow \mathcal{W}^0 \qquad \text{und} \qquad i: \ \mathcal{W}^0 \longrightarrow \mathcal{W}^0$$

Morphismen sind. □

Bemerkung 3.2.1
$\mathcal{W}$ wird das *Weierstraß-Modell* für E/K genannt.

Nun wollen wir uns der Frage nach der Existenz eines Néron-Modells zuwenden. Dazu müssen wir etwas ausholen.

3.2 Das minimale eigentliche und reguläre Modell

Um ein Néron-Modell für eine elliptische Kurve zu konstruieren, werden wir ihr Weierstraß-Modell desingularisieren und dabei ein sogenanntes minimales eigentliches und reguläres Modell erhalten. Deshalb soll kurz erwähnt werden, was dies ist und wie daraus die Existenz eines Néron-Modells folgt.

Satz 3.3
Sei R ein Dedekindring mit Quotientenkörper K und C/K eine glatte projektive Kurve vom Geschlecht g. Dann gilt:

(a) **[Abhyankar, Lipman]**
Es existert ein reguläres Schema $\mathcal{C}/R$, eigentlich und flach über R, dessen generische Faser isomorph zu E/K ist. $\mathcal{C}/R$ heißt ein eigentliches und reguläres Modell *für E/K.*

(b) **[Lichtenbaum, Shafarevich]**
Falls $g \geq 1$ ist, so existert ein reguläres Schema $\mathcal{C}^{min}/R$, eigentlich und flach über R, dessen generische Faser isomorph zu E/K ist und das die folgende Minimalitätseigenschaft erfüllt:
Sei $\mathcal{C}/R$ ein anderes solches Schema und sei ein Isomorphismus der generischen Faser von $\mathcal{C}$ auf die generische Faser von $\mathcal{C}^{min}$ gegeben. Dann ist die induzierte birationale Abbildung

$$\mathcal{C} \ - - -> \ \mathcal{C}^{min}$$

ein R-Morphismus. $\mathcal{C}^{min}/R$ heißt das minimale eigentliche und reguläre Modell *für E/K. Es ist eindeutig bis auf R-Isomorphie.*

Beweis:
(a) Siehe Abhyankar [Ab] und Lipman [Lm], Seite 151 .

(b) Siehe Lichtenbaum [Lb], Theorem 4.4, Seite 404 und Shafarevich [Sh], Lectures 6, 7 und 8, speziell Seite 155 .

Siehe Silverman [Si 2], Chapter IV, Theorem 4.5 für weitere Literatur zu diesem Satz.

Satz 3.4
Sei R ein Dedekindring mit Quotientenkörper K, E/K eine elliptische Kurve, $\mathcal{C}/R$ ein minimales eigentliches und reguläres Modell für E/K und sei $\mathcal{E}/R$ das größte Unterschema von $\mathcal{C}/R$, welches glatt über R ist. Dann ist $\mathcal{E}/R$ ein Néron-Modell für E/K.

Beweis: Siehe Silverman [Si 2], Chapter IV, Theorem 6.1 .

Bemerkung 3.4.1
Das Gruppenschema $\mathcal{E}/R$ besitzt ein Einselement, welches ein R-wertiger Punkt $\sigma_0 \in \mathcal{E}(R)$ ist. Das Bild $\sigma_0(R)$ des Einselements ist eine Kurve in $\mathcal{E}$, die für $\mathcal{P} \in Spec\ R$ die spezielle Faser $\mathcal{E}_{\mathcal{P}}$ in dem Punkt $\sigma_0(\mathcal{P})$ schneidet. Die Zusammenhangskomponente

von $\mathcal{E}_\mathcal{P}$, die $\sigma_0(\mathcal{P})$ enthält, heißt die *Eins-Komponente von* $\mathcal{E}_\mathcal{P}$. Das Schema, das man durch Entfernen aller von den Eins-Komponenten verschiedenen Komponenten erhält, heißt die *zusammenhängende Komponente von* $\mathcal{E}$ und wird mit $\mathcal{E}^0$ bezeichnet. $\mathcal{E}^0$ ist ein Untergruppenschema von $\mathcal{E}$. Ziel dieser Arbeit ist es, zu zeigen daß

$$\mathcal{E}^0 \;\cong\; \mathcal{W}^0$$

gilt (siehe Korollar 4.1). Dabei werden hier die allgemeinen Existenzsätze Satz 3.3 und Satz 3.4 nicht benutzt. Sondern der Algorithmus von Tate konstruiert explizit ein minimales eigentliches und reguläres Modell und ein Néron-Modell für E/K und beweist damit die Existenz der beiden Modelle im Fall elliptischer Kurven.

Diese Konstruktion verläuft folgendermaßen. Der Algorithmus von Tate konstruiert durch fortgesetztes Aufblasen der singulären Punkte des Weierstraß-Modells $\mathcal{W}/R$ ein eigentliches, reguläres Schema über R. Um dieses als minimales eigentliches und reguläres Modell für E/K zu erkennen, wird die folgende Kodaira-Néron-Klassifikation der Fasern eines minimalen eigentlichen und regulären Modells einer elliptischen Kurve verwendet.

Satz 3.5
Sei R ein diskreter Bewertungsring mit maximalem Ideal $\mathcal{P}$, Quotientenkörper K und algebraisch abgeschlossenem Restklassenkörper k. Sei E/K eine elliptische Kurve und $\mathcal{C}/R$ ein minimales eigentliches und reguläres Modell für E/K. Dann hat die spezielle Faser $\mathcal{C}_\mathcal{P}$ eine der folgenden Gestalten. (*Vergleiche Abbildung* 3.1 *auf Seite* 25 *. Die kleinen Zahlen in Abbildung* 3.1 *geben die Vielfachheiten der Komponenten an.*)

Typ I_0	*$\mathcal{C}_\mathcal{P}$ ist eine elliptische Kurve.*
Typ I_1	*$\mathcal{C}_\mathcal{P}$ ist eine rationale Kurve mit einem Doppelpunkt ('node').*
Typ I_n	*$\mathcal{C}_\mathcal{P}$ besteht aus n in einem n-Eck angeordneten nichtsingulären rationalen Kurven, bei $n \geq 2$.*
Typ II	*$\mathcal{C}_\mathcal{P}$ ist eine rationale Kurve mit einer Spitze ('cusp').*
Typ III	*$\mathcal{C}_\mathcal{P}$ besteht aus zwei nichtsingulären rationalen Kurven, die sich in einem Punkt tangential schneiden.*
Typ IV	*$\mathcal{C}_\mathcal{P}$ besteht aus drei nichtsingulären rationalen Kurven, die sich in einem Punkt transversal schneiden.*
Typ I_0^*	*$\mathcal{C}_\mathcal{P}$ besteht aus einer nichtsingulären rationalen Kurve mit Vielfachheit* 2 *und vier nichtsingulären rationalen Kurven mit Vielfachheit* 1, *die erstere in je einem Punkt transversal schneiden.*
Typ I_n^*	*$\mathcal{C}_\mathcal{P}$ besteht aus einer Kette von $n+1$ nichtsingulären rationalen Kurven mit Vielfachheit* 2 *und je zwei nichtsingulären rationalen Kurven mit Vielfachheit* 1, *die die Enden der Kette in je einem Punkt transversal schneiden.*
Typ IV^*	*$\mathcal{C}_\mathcal{P}$ besteht aus sieben nichtsingulären rationalen Kurven, die wie in Abbildung* 3.1 *angeordnet sind.*
Typ III^*	*$\mathcal{C}_\mathcal{P}$ besteht aus acht nichtsingulären rationalen Kurven, die wie in Abbildung* 3.1 *angeordnet sind.*
Typ II^*	*$\mathcal{C}_\mathcal{P}$ besteht aus neun nichtsingulären rationalen Kurven, die wie in Abbildung* 3.1 *angeordnet sind.*

Beweis: Siehe Silverman [Si 2], Chapter IV, Theorem 8.2 .

Bemerkung 3.5.1

Neben der eben angegebenen Notation von Kodaira gibt es noch eine weitere gebräuchliche, die auf Néron zurückgeht. Dabei sind folgende Bezeichnungen jeweils äquivalent.

Kodaira	I_0	I_n	II	III	IV	I_0^*	I_n^*	IV^*	III^*	II^*
Néron	a	b_n	$c1$	$c2$	$c3$	$c4$	$c5_n$	$c6$	$c7$	$c8$

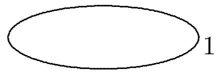
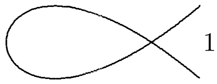
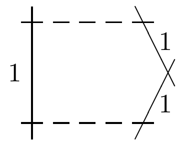
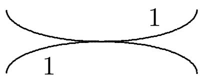
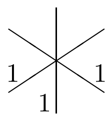
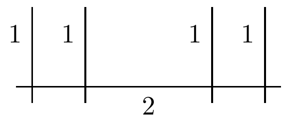
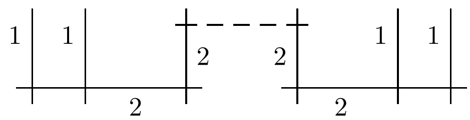
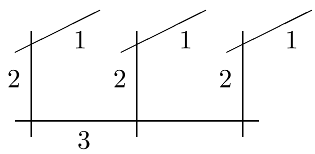
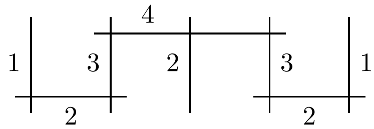
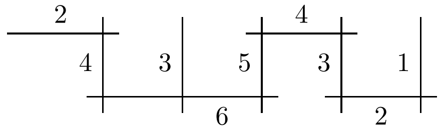
Bemerkung 3.5.2
Aus der Bewertung der Größen Δ, a_1, a_2, a_3, a_4, a_6, b_2, b_4 sowie b_6, die der Algorithmus von Tate berechnet, ersieht man wie sich diese Typen nach Ringerweiterungen $R \hookrightarrow R'$ im Falle semistabiler Reduktion verändern.

Sei π der uniformisierende Parameter von R und π' der uniformisierende Parameter von R'. Im Falle char $R/(\pi) \neq 2, 3$ gilt:

Gute Reduktion: Die Typen II, III, IV, I_0^*, IV^*, III^* und II^* werden zu Typ I_0.

Multiplikative Reduktion: Der Typ I_n^* wird zu Typ I_{rn}, wobei $\pi R' = (\pi')^r$ und r gerade ist.

Abbildung 3.1: Die Kodaira-Néron-Klassifikation für die spezielle Faser

Reduktions-Typ	Anzahl der Komponenten	Konfiguration (mit Vielfachheiten)
I_0	1	
I_1	1	
I_n	n	
II	1	
III	2	
IV	3	
I_0^*	5	
I_n^*	$n+5$	
IV^*	7	
III^*	8	
II^*	9	

Kapitel 4

Der Algorithmus von Tate

In diesem und dem folgenden Kapitel sei R ein diskreter Bewertungsring mit Quotientenkörper K, uniformisierendem Parameter π, perfektem Restklassenkörper k und normierter Bewertung v. $\bar{k}$ sei der algebraische Abschluß von k. Zu einem R-Schema X soll mit $\widetilde{X}$ die spezielle Faser $\widetilde{X} := X \otimes_R k$ bezeichnet werden.

Der Algorithmus von Tate ist eine Folge von Anweisungen, um zu einer elliptischen Kurve E/K das minimale eigentliche und reguläre Modell $\mathcal{C}/R$ und das Néron-Modell $\mathcal{E}/R$ zu konstruieren. Alle angegebenen Werte können dann von dem Néron-Modell abgelesen werden. Da der Algorithmus sich schlecht als Satz formulieren läßt, soll zuvor ein Ergebnis angegeben weden. Dieses ist eine Folgerung, die während der Konstruktion des Néron-Modells gezogen werden kann und sie soll deshalb als Korollar formuliert werden.

Korollar 4.1
Die elliptische Kurve E/K sei durch eine minimale Weierstraß-Gleichung gegeben. Diese Gleichung definiert ein abgeschlossenes Unterschema $\mathcal{W} \subset \mathbf{P}^2_R$ über R. Sei $\mathcal{W}^0$ das größte Unterschema von $\mathcal{W}$, welches glatt über R ist. Dann ist

$$\mathcal{W}^0 \;\cong\; \mathcal{E}^0,$$

das heißt, $\mathcal{W}^0$ ist die zusammenhängende Komponente des Néron-Modells $\mathcal{E}/R$ für E/K.

Der Algorithmus von Tate berechnet zu einer elliptischen Kurve E/K die folgenden zugehörigen Werte:

Typ	den Reduktionstyp der speziellen Faser $\widetilde{\mathcal{C}}$ über $\bar{k}$. Als Bezeichnung hierfür werden die Kodaira-Symbole aus Satz 3.5 verwendet.
$m(E/K)$	die Anzahl der Komponenten von $\mathcal{C}$, die über $\bar{k}$ definiert sind ohne Vielfachheit gezählt.
$v(\mathcal{D}_{E/K})$	die Bewertung der minimalen Diskriminante von E/K.

$c(E/K)$ die Ordnung der Komponentengruppe $\widetilde{\mathcal{E}}(k)/\widetilde{\mathcal{E}}^0(k)$. Diese ist gleich der Anzahl der Komponenten der speziellen Faser $\widetilde{\mathcal{C}}$, welche Vielfachheit 1 haben und über k definiert sind.

Für diese Größen werden auch folgende Symbole verwendet

$$m \;=\; m(E/K), \qquad c \;=\; c(E/K),$$

wenn die elliptische Kurve E und der Körper K aus dem Kontext klar sind.

Der Algorithmus von Tate beginnt mit einer beliebigen Weierstraß-Gleichung

$$y^2 + a_1xy + a_3y \;=\; x^3 + a_2x^2 + a_4x + a_6$$

für E/K und desingularisiert das zugehörige Weierstraß-Modell durch Aufblasungen. Man erhält ein minimales eigentliches und reguläres Modell $\mathcal{C}$. Von diesem kann man dann die gesamten Informationen ablesen. Auf dem Weg dorthin werden einige Annahmen gemacht. Diese sind kummulativ und werden der Übersicht halber $\boxed{\text{eingerahmt}}$.

Durch eine Variablentransformation kann man erreichen, daß die Weierstraß-Gleichung Koeffizienten $\boxed{a_1,\, a_2,\, a_3,\, a_4,\, a_6 \;\in\; R}$ hat. Die zugehörigen Größen seien wie üblich

$$\begin{aligned}
b_2 &= a_1{}^2 + 4a_2,\\
b_4 &= a_1a_3 + 2a_4,\\
b_6 &= a_3{}^2 + 4a_6,\\
b_8 &= a_1{}^2a_6 + 4a_2a_6 - a_1a_3a_4 + a_2a_3{}^2 - a_4{}^2 \;=\; (b_2b_6 - b_4{}^2)/4,\\
\Delta &= -\,b_2{}^2b_8 - 8b_4{}^3 - 27b_6{}^2 + 9b_2b_4b_6.
\end{aligned}$$

Es wird nicht vorausgesetzt, daß die ursprüngliche Weierstraß-Gleichung minimal ist. Wenn der Algorithmus terminiert, so wird die resultierende Weierstraß-Gleichung minimal sein.

<u>Schritt 1</u>

Falls $\pi \nmid \Delta$, so ist die spezielle Faser $\widetilde{\mathcal{E}}$ eine elliptische Kurve über k und man hat

$$\text{Typ } \mathrm{I}_0, \qquad v(\Delta) = 0, \qquad m = 1, \qquad c = 1.$$

<u>Schritt 2</u>

Sei $\boxed{\pi \mid \Delta}$. Dann hat die spezielle Faser $\widetilde{\mathcal{E}}$ genau einen singuläre Punkt. Dieser ist k-wertig und wird durch eine geeignete Translation nach $x = y = \pi = 0$ verschoben. Dadurch wird $\boxed{\pi \mid a_3,\, a_4,\, a_6}$.

Falls $\pi \nmid b_2$, so sei k' der Zerfällungskörper des Polynoms $T^2 + \tilde{a}_1T - \tilde{a}_2$ über k. Man hat

$$\text{Typ } \mathrm{I}_n, \qquad v(\Delta) = n \geq 1, \qquad m = n.$$

Ferner, falls $k' = k$ ist, so hat E split multiplikative Reduktion und es ist

$$\widetilde{\mathcal{E}}^0(k) \;\cong\; k^\times \qquad \text{und} \qquad c = n.$$

Falls $k' \neq k$ ist, so hat E non-split multiplikative Reduktion und es ist

$$\widetilde{\mathcal{E}}^0(k) \;\cong\; \{\alpha \in k' : \mathrm{N}_k^{k'}(\alpha) = 1\} \qquad \text{und} \qquad \begin{cases} c = 1 & \text{falls } n \text{ ungerade ist,} \\ c = 2 & \text{falls } n \text{ gerade ist.} \end{cases}$$

Von jetzt an hat $\widetilde{\mathcal{E}}$ eine Spitze und $\boxed{\widetilde{\mathcal{E}}^0(k) \;\cong\; k^+}$. Die Weierstraß-Gleichung wird nun transformiert, so daß die a_i durch immer höhere Potenzen von π teilbar werden. Dabei wird folgende Notation verwendet:

$$a_{i,r} \;:=\; \pi^{-r} a_i.$$

<u>Schritt 3</u>

Sei $\boxed{\pi \,|\, b_2}$. Falls $\pi^2 \nmid a_6$, so hat man

$$\text{Typ II}, \qquad m = 1, \qquad c = 1.$$

<u>Schritt 4</u>

Sei $\boxed{\pi^2 \,|\, a_6}$. Daraus folgt $\pi^2 \,|\, b_6,\, b_8$. Falls $\pi^2 \nmid a_4$, so hat man

$$\text{Typ III}, \qquad m = 2, \qquad c = 2.$$

<u>Schritt 5</u>

Sei $\boxed{\pi^2 \,|\, a_4}$. Daraus folgt $\pi^2 \,|\, b_4$ und $\pi^3 \,|\, b_8$. Falls $\pi^3 \nmid b_6$, so sei k' der Zerfällungskörper des Polynoms $T^2 + \tilde{a}_{3,1}T - \tilde{a}_{6,2}$ über k. Man hat

$$\text{Typ IV}, \qquad m = 3, \qquad \begin{cases} c = 3 & \text{falls } k' = k, \\ c = 1 & \text{falls } k' \neq k. \end{cases}$$

<u>Schritt 6</u>

Sei $\boxed{\pi^3 \,|\, b_6}$. Dann kann man

$$\begin{aligned} y^2 + a_1 y - a_2 &\;\equiv\; (y-s)^2 \mod \pi \\ y^2 + a_{3,1} y - a_{6,2} &\;\equiv\; (y-t)^2 \mod \pi \end{aligned}$$

mit $s, t \in R$ faktorisieren und die Translation $y \to y + sx + \pi t$ liefert das Ergebnis $\boxed{\pi \,|\, a_1,\, a_2,\;\; \pi^2 \,|\, a_3,\, a_4,\;\; \pi^3 \,|\, a_6}$. Nun betrachte man die Faktorisierung von

$$P(T) \;:=\; T^3 + \tilde{a}_{2,1}T^2 + \tilde{a}_{4,2}T + \tilde{a}_{6,3}$$

über $\bar{k}$. Für konkrete Berechnungen sei angemerkt, daß P folgende Diskriminante hat

$$\mathrm{Diskr}(P) \;=\; \pi^{-6}\big(-4a_2^3a_6 + a_2^2a_4^2 - 4a_4^3 - 27a_6^2 + 18a_2a_4a_6\big).$$

Falls $P(T)$ drei verschiedene Nullstellen in $\bar{k}$ hat, also wenn $\pi \nmid \operatorname{Diskr}(P)$, so hat man

$$\text{Typ } \mathrm{I}_0^*, \qquad m = 5, \qquad c = 1 + \#\{\alpha \in k : P(\alpha) = 0\}.$$

Schritt 7

Falls $P(T)$ eine einfache und eine doppelte Nullstelle in $\bar{k}$ hat, so hat man

$$\text{Typ } \mathrm{I}_n^*, \qquad m = n + 5, \qquad c = 2 \quad \text{oder } \ 4.$$

Bei $\operatorname{char}(k) \neq 2$ gilt zusätzlich $n = v(\Delta) - 6$ und somit $m = v(\Delta) - 1$. Für beliebige Charakteristik $\operatorname{char}(k)$ können die Werte von n und c durch folgende Unterprozedur bestimmt werden.

Schritt 7 (Unterprozedur)

Durch eine Translation verschiebe man x so, daß die doppelte Nullstelle von $P(T)$ gleich $T = 0$ ist. Damit wird $\pi^2 \nmid a_2$, $\pi^3 \mid a_4$ und $\pi^4 \mid a_6$. Falls das Polynom $y^2 + \tilde{a}_{3,2}y - \tilde{a}_{6,4}$ zwei verschiedene Nullstellen in $\bar{k}$ hat, so sei k' sein Zerfällungskörper über k. Dann hat man

$$\text{Typ } \mathrm{I}_1^*, \qquad m = 6, \qquad \begin{cases} c = 4 & \text{falls } k' = k, \\ c = 2 & \text{falls } k' \neq k. \end{cases}$$

Falls $y^2 + \tilde{a}_{3,2}y - \tilde{a}_{6,4}$ eine doppelte Nullstelle in $\bar{k}$ hat, so translatiere man y so, daß diese zu $y = 0$ wird. Damit wird $\pi^3 \mid a_3$ und $\pi^5 \mid a_6$. Falls das Polynom $\tilde{a}_{2,1}x^2 + \tilde{a}_{4,3}x + \tilde{a}_{6,5}$ zwei verschiedene Nullstellen in $\bar{k}$ hat, so sei k' sein Zerfällungskörper über k. Dann hat man

$$\text{Typ } \mathrm{I}_2^*, \qquad m = 7, \qquad \begin{cases} c = 4 & \text{falls } k' = k, \\ c = 2 & \text{falls } k' \neq k. \end{cases}$$

Falls $\tilde{a}_{2,1}x^2 + \tilde{a}_{4,3}x + \tilde{a}_{6,5}$ eine doppelte Nullstelle in $\bar{k}$ hat, so translatiere man x so, daß diese zu $x = 0$ wird. Damit wird $\pi^4 \mid a_4$ und $\pi^6 \mid a_6$. Falls das Polynom $y^2 + \tilde{a}_{3,3}y - \tilde{a}_{6,6}$ zwei verschiedene Nullstellen in $\bar{k}$ hat, so sei k' sein Zerfällungskörper über k. Dann hat man

$$\text{Typ } \mathrm{I}_3^*, \qquad m = 8, \qquad \begin{cases} c = 4 & \text{falls } k' = k, \\ c = 2 & \text{falls } k' \neq k. \end{cases}$$

Falls $y^2 + \tilde{a}_{3,3}y - \tilde{a}_{6,6}$ eine doppelte Nullstelle in $\bar{k}$ hat, und so weiter. Man führe diese Prozedur fort, bis das auftretende quadratische Polynom zwei verschiedene Nullstellen in $\bar{k}$ hat. Der Prozeß bricht schließlich ab, da nach je zwei Schritten a_3, a_4 und a_6 durch mindestens eine zusätzliche Potenz von π teilbar gemacht wurden. Das bedeutet, daß auch b_4, b_6 und b_8 durch mindestens eine zusätzliche Potenz von π teilbar sind und somit gilt das gleiche für Δ. Da aber Δ bei allen durchgeführten Translationen invariant ist, bricht die Prozedur schließlich ab.

Schritt 8

Nun habe $P(T)$ eine dreifache Nullstelle in $\bar{k}$. Durch eine Translation von x kann diese zu $T = 0$ gemacht werden. Damit wird $\boxed{\pi^2 \mid a_2,\ \pi^3 \mid a_4 \text{ und } \pi^4 \mid a_6}$. Falls das Polynom

$y^2 + \tilde{a}_{3,2}y - \tilde{a}_{6,4}$ zwei verschiedene Nullstellen in $\bar{k}$ hat, so sei k' sein Zerfällungskörper über k. Dann hat man

$$\text{Typ IV}^*, \qquad m = 7, \qquad \begin{cases} c = 3 & \text{falls } k' = k, \\ c = 1 & \text{falls } k' \neq k. \end{cases}$$

Schritt 9

Habe nun $y^2 + \tilde{a}_{3,2}y - \tilde{a}_{6,4}$ eine doppelte Nullstelle in $\bar{k}$. Durch eine Translation von y kann diese zu $y = 0$ gemacht werden. Damit wird $\boxed{\pi^3 \mid a_3 \text{ und } \pi^5 \mid a_6}$. Falls $\pi^4 \nmid a_4$, so hat man

$$\text{Typ III}^*, \qquad m = 8, \qquad c = 2.$$

Schritt 10

Sei $\boxed{\pi^4 \mid a_4}$. Falls $\pi^6 \nmid a_6$, so hat man

$$\text{Typ II}^*, \qquad m = 9, \qquad c = 1.$$

Schritt 11

Schließlich sei $\boxed{\pi^6 \mid a_6}$. Dann war die ursprüngliche Weierstraß-Gleichung nicht minimal. Die Transformation $(x, y) = (\pi^2 x', \pi^3 y')$ führt zu der Gleichung

$$y'^2 + a_{1,1}x'y' + a_{3,3}y' = x'^3 + a_{2,2}x'^2 + a_{4,4}x' + a_{6,6}$$

mit Koeffizienten in R und Diskriminante $\Delta' = \pi^{-12}\Delta$. Man gehe nun zurück zu Schritt 1 und beginne den Algorithmus mit dieser Gleichung erneut. Man beachte dabei, daß man zu Schritt 11 nur endlich oft gelangen kann, da bei jedem Mal die Diskriminante der ursprünglichen Weierstraß-Gleichung durch einen zusätzlichen Faktor π^{12} teilbar sein wird. Da aber $\Delta \neq 0$ in R ist, wird der Algorithmus terminieren.

Schritt	Bedingungen	Resultat
1.	$\pi \nmid \Delta$	$\Longrightarrow$ Typ I_0
2.	$\pi \mid \Delta\,,\quad \pi \nmid b_2$	$\Longrightarrow$ Typ I_n
3.	$\pi \mid \Delta\,,\quad \pi \mid b_2\,,\quad \pi^2 \nmid a_6$	$\Longrightarrow$ Typ II
4.	$\pi \mid \Delta\,,\quad \pi \mid b_2\,,\quad \pi^2 \mid a_6\,,\quad \pi^2 \nmid a_4$	$\Longrightarrow$ Typ III
5.	$\pi \mid \Delta\,,\quad \pi \mid b_2\,,\quad \pi^2 \mid a_6\,,\quad \pi^2 \mid a_4\,,\quad \pi^3 \nmid b_6$	$\Longrightarrow$ Typ IV
	$\pi \mid \Delta\,,\quad \pi \mid b_2\,,\quad \pi^2 \mid a_6\,,\quad \pi^2 \mid a_4\,,\quad \pi^3 \mid b_6 \quad \Longrightarrow \quad$ Translation : $\pi \mid a_1,\ a_2,\ \ \pi^2 \mid a_3,\ a_4,\ \ \pi^3 \mid a_6$. Ermöglicht es, $P(T) \;=\; T^3 + \tilde{a}_{2,1}T^2 + \tilde{a}_{4,2}T + \tilde{a}_{6,3} \quad \in k[T]$ zu betrachten.	
6.	P hat drei einfache Nullstellen	$\Longrightarrow$ Typ I_0^*
7.	P hat eine einfache und eine doppelte Nullstelle $\Longrightarrow$ Translation : $\pi^2 \nmid a_2,\ \ \pi^3 \mid a_4,\ \ \pi^4 \mid a_6$. Ermöglicht es, $Q_1(y) \;=\; y^2 + \tilde{a}_{3,2}y - \tilde{a}_{6,4} \quad \in k[y]$ zu betrachten.	
7. a)	Q_1 hat zwei verschiedene Nullstellen	$\Longrightarrow$ Typ I_1^*
	Q_1 hat eine doppelte Nullstelle $\Longrightarrow$ Translation : $\pi^2 \nmid a_2,\ \ \pi^3 \mid a_3,\ \ \pi^5 \mid a_6$. Ermöglicht es, $Q_2(x) \;=\; \tilde{a}_{2,1}x^2 + \tilde{a}_{4,3}x - \tilde{a}_{6,5} \quad \in k[x]$ zu betrachten.	
7. b)	Q_2 hat zwei verschiedene Nullstellen	$\Longrightarrow$ Typ I_2^*
	Q_2 hat eine doppelte Nullstelle $\Longrightarrow$ Translation : $\pi^2 \nmid a_2,\ \ \pi^4 \mid a_4,\ \ \pi^6 \mid a_6$. Ermöglicht es, $Q_3(y) \;=\; y^2 + \tilde{a}_{3,3}y - \tilde{a}_{6,6} \quad \in k[y]$ zu betrachten.	
7. c)	Q_3 hat zwei verschiedene Nullstellen	$\Longrightarrow$ Typ I_3^*
	Q_3 hat eine doppelte Nullstelle $\Longrightarrow$ ...	
8.	P hat eine dreifache Nullstelle $\Longrightarrow$ Translation : $\pi^2 \mid a_2,\ \ \pi^3 \mid a_4,\ \ \pi^4 \mid a_6$. Ermöglicht es, $Q_1(y) \;=\; y^2 + \tilde{a}_{3,2}y - \tilde{a}_{6,4} \quad \in k[y]$ zu betrachten.	
	Q_1 hat zwei verschiedene Nullstellen	$\Longrightarrow$ Typ IV^*
9.	Q_1 hat eine doppelte Nullstelle $\Longrightarrow$ Translation : $\pi^3 \mid a_3,\ \ \pi^5 \mid a_6$.	
	$\pi^4 \nmid a_4$	$\Longrightarrow$ Typ III^*
10.	$\pi^4 \mid a_4\,,\quad \pi^6 \nmid a_6$	$\Longrightarrow$ Typ II^*
11.	$\pi^4 \mid a_4\,,\quad \pi^6 \mid a_6 \quad \Longrightarrow \quad$ Transformation : $\Delta' \;=\; \pi^{-12}\Delta$. Gehe zurück zu 1.	

Tabelle 4.1: Schematische Übersicht des Algorithmus von Tate

Kapitel 5

Beweis des Algorithmus von Tate

Der Algorithmus von Tate beginnt mit dem durch eine Weierstraß-Gleichung gegebenen Schema. Daraus wird durch fortgesetztes Aufblasen der singulären Punkte ein minimales eigentliches und reguläres Modell $\mathcal{C}/R$ für E/K konstruiert. Das Néron-Modell $\mathcal{E}$ ist dann der über R glatte Ort von $\mathcal{C}$. Das Aufblasen dient dazu, die Nullstellen der Polynome P, Q_1, Q_2, ... von Tabelle 4.1 in der Reduktion modulo π auseinanderzuhalten.

5.1 Beweis von Schritt 1

Die Bedingung $\pi \nmid \Delta$ bedeutet, daß $\mathcal{W}$ glatt über R ist. Nach Korollar 2.23 ist $\mathcal{W}$ regulär und somit $\mathcal{E} = \mathcal{C} = \mathcal{W}$ und die spezielle Faser ist vom Typ I_0.

5.2 Beweis von Schritt 2 (1.Teil)

In Schritt 2 haben wir $\pi \mid \Delta$ und $\pi \nmid b_2$.

Nach Satz 2.27 bedeutet dies, daß die spezielle Faser $\widetilde{\mathcal{W}}$ einen singulären k-wertigen Punkt hat. Durch eine Translation kann dieser auf $X = Y = \pi = 0$ verschoben werden. Dies bedeutet, daß $\tilde{a}_3 = \tilde{a}_4 = \tilde{a}_6 = 0$, also $\pi \mid a_3$, a_4, a_6 wird.

Sei zunächst $v(\Delta) = 1$. Dieser Fall wird durch folgendes Lemma erledigt.

Lemma 5.1
Sei R ein diskreter Bewertungsring mit Quotientenkörper K. Die elliptische Kurve E/K sei gegeben durch eine Weierstraß-Gleichung

$$Y^2Z + a_1XYZ + a_3YZ^2 \quad = \quad X^3 + a_2X^2Z + a_4XZ^2 + a_6Z^3$$

mit Koeffizienten in R. Sei $\mathcal{W} \subset \mathbf{P}^2_R$ das durch diese Gleichung definierte R-Schema und sei $\mathcal{W}^0/R$ das größte Unterschema von $\mathcal{W}$, welches glatt über R ist.

(a) *Falls $v(\Delta) = 1$ ist, so ist $\mathcal{W}$ regulär, $\mathcal{C} = \mathcal{W}$ und $\mathcal{E} = \mathcal{W}^0$. Die Kurve E hat Reduktionstyp I_1.*

(b) *Falls* $\pi \mid a_3$, a_4, a_6 *und* $\pi^2 \nmid a_6$, *so ist* $\mathcal{W}$ *regulär,* $\mathcal{C} = \mathcal{W}$ *und* $\mathcal{E} = \mathcal{W}^0$. *Die Kurve* E *hat Reduktionstyp* I_1, *falls* $\pi \nmid b_2$ *und Reduktionstyp* II, *falls* $\pi \mid b_2$.

Beweis:
Wie eben beschrieben bedeutet $\pi \mid \Delta$, daß man $\pi \mid a_3$, a_4 und a_6 erhalten kann. Dies bedeutet, daß $\pi \mid b_4$, b_6 und b_8. Falls $v(\Delta) = 1$, so muß $v(b_2^2 b_8) = 1$ sein, da alle anderen Summanden in der Formel für Δ durch π^2 teilbar sind. Damit folgt $v(b_8) = 1$ und $\pi \nmid b_2$. Nun ist aber

$$b_8 \;=\; b_2 a_6 - a_1 a_3 a_4 + a_2 a_3^2 - a_4^2$$

und aus $v(b_8) = 1$ folgt $v(a_6) = 1$.

Aus $\pi \mid a_3$, a_4, a_6 und $\pi^2 \nmid a_6$ folgt nun folgendermaßen, daß $\mathcal{W}$ regulär ist:

Nach Satz 2.19 genügt es die Regularität der abgeschlossenen Punkte zu überprüfen. Sei also $P \in \widetilde{\mathcal{W}}$ ein abgeschlossener Punkt und $\mathcal{M}$ das maximale Ideal in $\mathcal{O}_{\mathcal{W},P}$.

$P \neq (X, Y, \pi)$: Wegen Satz 2.27 ist P glatt über R. Aus Korollar 2.23 folgt dann, daß P regulärer Punkt von $\mathcal{W}$ ist.

$P = (X, Y, \pi)$: dann ist $\mathcal{M} = (X, Y, \pi)$. Da $v(a_6) = 1$ hat man

$$\pi \;\sim\; a_6 \;=\; Y^2 + a_1 XY + a_3 Y - X^3 - a_2 X^2 - a_4 X.$$

Es folgt $\mathcal{M} = (X, Y)$ und P ist regulär.

Somit ist $\mathcal{W}$ regulär und als abgeschlossenes Unterschema von $\mathbf{P}^2_R$ auch eigentlich über R.

Die spezielle Faser von $\mathcal{W}$ ist durch $Y^2 + a_1 XY = X^3 + a_2 X^2$ in $\mathbf{P}^2_k$ gegeben. Sie hat einen Doppelpunkt ('node') und ist vom Typ I_1, falls $Y_1^2 + a_1 X_1 Y_1 - a_2 X_1^2$ zwei verschiedene Nullstellen in $\bar{k}$ hat, also wenn $\pi \nmid b_2$. Sie hat eine Spitze ('cusp') und ist vom Typ II, falls $Y_1^2 + a_1 X_1 Y_1 - a_2 X_1^2$ eine doppelte Nullstelle in $\bar{k}$ hat, also wenn $\pi \mid b_2$. Somit folgt, daß $\mathcal{W}$ ein minimales eigentliches und reguläres Modell von E/K ist und deshalb $\mathcal{C} = \mathcal{W}$ und $\mathcal{E} = \mathcal{W}^0$ ist. Da aus $v(\Delta) = 1$ folgt $\pi \nmid b_2$, ist Lemma 5.1 bewiesen. □

Sei nun $v(\Delta) \geq 2$. Dann folgt wie im Beweis von Lemma 5.1 wegen $\pi \nmid b_2$, daß $\pi^2 \mid a_6$. Dieser Fall wird in Abschnitt 5.4 behandelt.

5.3 Beweis von Schritt 3

In Schritt 3 ist $\pi \mid a_3$, a_4, a_6, b_2, $\pi^2 \nmid a_6$. Dies ist die Voraussetzung von Lemma 5.1 und so folgt die Behauptung aus Lemma 5.1.

5.4 Aufblasen des Weierstraß-Modells

Sei nun $\pi \mid a_3$, a_4 und $\pi^2 \mid a_6$. Dann ist $\mathcal{W} = Proj\ R[X, Y, Z]/(F)$, wobei

$$F \;=\; Y^2 Z + a_1 XYZ + \pi a_{3,1} YZ^2 - X^3 - a_2 X^2 Z - \pi a_{4,1} XZ^2 - \pi^2 a_{6,2} Z^3.$$

Dies bedeutet, daß $F \in (X, Y, \pi)^2 \subset R[X, Y, Z]$ liegt. Daraus folgt, daß X, Y, π mod $\mathcal{M}^2$ linear unabhängig über $k = \mathcal{O}_{\mathcal{W},P}/\mathcal{M}$ sind und daß P singulärer Punkt ist. Dies sieht man folgendermaßen:

Es sei die Linearkombination $\lambda_1 X + \lambda_2 Y + \lambda_3 \pi \in \mathcal{M}^2$ mit $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3 \in k$. Nun ist zu zeigen, daß $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ ist. Wegen $k = R/(\pi)$ lassen sich $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3$ durch Repräsentanten aus R ersetzen. Dann ist $\lambda_1 X + \lambda_2 Y + \lambda_3 \pi \in \mathcal{M}^2 \cap R[X, Y, Z]/(F)$. $\lambda_1 X + \lambda_2 Y + \lambda_3 \pi$ ist zwar nur modulo F bestimmt, aber da $F \in (X, Y, \pi)^2 \subset R[X, Y, Z]$ ist, gilt $\lambda_1 X + \lambda_2 Y + \lambda_3 \pi \in (X, Y, \pi)^2 \subset R[X, Y, Z]$. Man betrachte nun den Einsetzhomomorphismus

$$R[X, Y, Z] \longrightarrow R; \qquad (X, Y, Z) \mapsto (r\pi, s\pi, 1) \qquad \text{für feste } r, s \in R.$$

Darunter wird $(X, Y, \pi)^2$ in $(\pi)^2$ abgebildet. Das bedeutet $\lambda_1 r\pi + \lambda_2 s\pi + \lambda_3 \pi \in (\pi)^2$, also $\lambda_1 r + \lambda_2 s + \lambda_3 \in (\pi)$. Wählt man nun $r = s = \pi$, so erhält man $\lambda_3 \in (\pi)$ und $\lambda_1 r + \lambda_2 s \in (\pi)$. mit $r = \pi$ und $s = 1$ ergibt sich $\lambda_2 \in (\pi)$ und $\lambda_1 r \in (\pi)$ und mit $r = 1$ bekommt man $\lambda_1 \in (\pi)$, also $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ in k.

Der Punkt $(X, Y, \pi) \in \mathcal{W}$ ist also singulär und wird gemäß Abschnitt 2.6 aufgeblasen.

5.4.1 Aufblasen von $\mathcal{W}$ entlang $(X,\ Y,\ \pi)$

$$\mathcal{I} \;=\; (X,\ Y,\ \pi), \qquad \mathcal{S} \;=\; \bigoplus_{d \geq 0} \mathcal{I}^d$$

Über den affinen, offenen Mengen ergibt sich:

$\underline{Y \neq 0:}$ $\quad U_Y \;=\; Spec\ R[\frac{X}{Y}, \frac{Z}{Y}]$

> Man hat die surjektive Abbildung $R[\frac{X}{Y}, \frac{Z}{Y}][X_1', Y_1', Z_1'] \to \mathcal{S}(U_Y)$ durch die Zuordnung $(X_1', Y_1', Z_1') \mapsto (\frac{X}{Y}, 1, \pi)$.
>
> Ihr Kern ist $I_Y = (X_1' - Y_1'\frac{X}{Y},\ Z_1' - Y_1'\pi,\ X_1'\pi - Z_1'\frac{X}{Y})$.
>
> Also ergibt sich $\mathcal{S}(U_Y) \cong R[\frac{X}{Y}, \frac{Z}{Y}][Y_1']$ und damit $Proj\ \ \mathcal{S}(U_Y) \cong Spec\ \ R[\frac{X}{Y}, \frac{Z}{Y}]$.
>
> $\phi_Y : Proj\ \ \mathcal{S}(U_Y) \to U_Y$ ist gegeben durch $R[\frac{X}{Y}, \frac{Z}{Y}] \to \mathcal{S}(U_Y)$ und ist ein Isomorphismus.

$\underline{X \neq 0:}$ analog zu $Y \neq 0$ ergibt sich, daß $\phi_X : Proj\ \ \mathcal{S}(U_X) \to U_X$ ein Isomorphismus ist.

$\underline{Z \neq 0:}$ $\quad U_Z \;=\; Spec\ R[\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}]$

> Man hat die surjektive Abbildung $R[\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}][X_1, Y_1, Z_1] \to \mathcal{S}(U_Z)$ durch die Zuordnung $(X_1, Y_1, Z_1) \mapsto (\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}, \pi)$.
>
> Ihr Kern ist $I_Z = (X_1\frac{Y}{Z} - Y_1\frac{X}{Z},\ X_1\pi - Z_1\frac{X}{Z},\ Y_1\pi - Z_1\frac{Y}{Z})$.
>
> Also ergibt sich $\mathcal{S}(U_Z) \cong R[\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}][X_1, Y_1, Z_1]/I_Z$.
>
> $\phi_Z : Proj\ \ \mathcal{S}(U_Z) \to U_Z$ ist gegeben durch $R[\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}] \to \mathcal{S}(U_Z)$.

Über $Y \neq 0, Z \neq 0$ werden $Proj\ \mathcal{S}(U_Y)$ und $Proj\ \mathcal{S}(U_Z)$ zusammengeklebt durch

$$(X_1', Y_1', Z_1') \;=\; (\frac{Z}{Y}X_1, \frac{Z}{Y}Y_1, Z_1) \quad \text{beziehungsweise} \quad (\frac{Y}{Z}X_1', \frac{Y}{Z}Y_1', Z_1') \;=\; (X_1, Y_1, Z_1).$$

Dadurch erhält man $\mathbf{Proj}\ \mathcal{S}$ als Unterschema von $\mathbf{P}^2_R \times_{Spec\, R} \mathbf{P}^2_R$.

Die drei Morphismen ϕ_X, ϕ_Y und ϕ_Z setzen sich zusammen zu dem Morphismus $\phi : \mathbf{Proj}\ \mathcal{S} \longrightarrow Proj\ R[X,Y,Z]$.

Die strikte Transformation von $\mathcal{W}$ erhält man gemäß Satz 2.32 als den Abschluß

$\mathcal{V}_1 \;:=\; \overline{\phi^{-1}(\mathcal{W} - \{(X,Y,\pi)\})}$ in $\mathbf{Proj}\ \mathcal{S}$.

Über dem affinen Teil $Z \neq 0$ von $\mathcal{W}$ liegen dabei folgende Teile von $\mathcal{V}_1$:

In $X_1 \neq 0$: $\quad \Rightarrow \quad \dfrac{Y}{Z} \;=\; \dfrac{Y_1}{X_1}\dfrac{X}{Z}$ und $\pi \;=\; \dfrac{Z_1}{X_1}\dfrac{X}{Z}$. Damit folgt

$$X_1^2 \cdot \frac{F}{Z^3} \;=\; \left(\frac{X}{Z}\right)^2 (Y_1^2 + a_1 X_1 Y_1 + a_{3,1} Y_1 Z_1 - \frac{X}{Z} X_1^2 - a_2 X_1^2 - a_{4,1} X_1 Z_1 - a_{6,2} Z_1^2) \;=\; 0\,.$$

Falls $\frac{X}{Z} = 0$, so folgt $\frac{Y}{Z} = \pi = 0$ und der Punkt ist $\notin \phi^{-1}(\mathcal{W}_1 - \{(X,Y,\pi)\})$. Also bleibt nur

$$F_1^* \;:=\; Y_1^2 + a_1 X_1 Y_1 + a_{3,1} Y_1 Z_1 - \frac{X}{Z} X_1^2 - a_2 X_1^2 - a_{4,1} X_1 Z_1 - a_{6,2} Z_1^2 \;=\; 0.$$

In $Y_1 \neq 0$: $\quad \Rightarrow \quad \dfrac{X}{Z} \;=\; \dfrac{X_1}{Y_1}\dfrac{Y}{Z}$ und $\pi \;=\; \dfrac{Z_1}{Y_1}\dfrac{Y}{Z}$. Damit folgt

$$Y_1^2 \cdot \frac{F}{Z^3} \;=\; \left(\frac{Y}{Z}\right)^2 (Y_1^2 + a_1 X_1 Y_1 + a_{3,1} Y_1 Z_1 - \frac{X}{Z} X_1^2 - a_2 X_1^2 - a_{4,1} X_1 Z_1 - a_{6,2} Z_1^2) \;=\; 0\,.$$

Falls $\frac{Y}{Z} = 0$, so folgt $\frac{X}{Z} = \pi = 0$ und der Punkt ist $\notin \phi^{-1}(\mathcal{W}_1 - \{(X,Y,\pi)\})$. Also bleibt nur $F_1^* = 0$.

In $Z_1 \neq 0$: $\quad \Rightarrow \quad \dfrac{X}{Z} \;=\; \dfrac{X_1}{Z_1}\pi$ und $\dfrac{Y}{Z} \;=\; \dfrac{Y_1}{Z_1}\pi$. Damit folgt

$$Z_1^2 \cdot \frac{F}{Z^3} \;=\; \pi^2 (Y_1^2 + a_1 X_1 Y_1 + a_{3,1} Y_1 Z_1 - \frac{X}{Z} X_1^2 - a_2 X_1^2 - a_{4,1} X_1 Z_1 - a_{6,2} Z_1^2) \;=\; 0\,.$$

Falls $\pi = 0$, so folgt $\frac{X}{Z} = \frac{Y}{Z} = 0$ und der Punkt ist $\notin \phi^{-1}(\mathcal{W}_1 - \{(X,Y,\pi)\})$. Also bleibt nur $F_1^* = 0$.

Man bekommt also $\mathcal{V}_1$ durch das Ideal (F_1^*) in $\mathbf{Proj}\ \mathcal{S}$.

5.4.2 Einbettung von $\mathcal{V}_1$ in den $\mathbf{P}^2_R$

Es gilt $\mathcal{V}_1 \cong \mathit{Proj}\ R[X_1, Y_1, Z_1]/(F_1) \subset \mathbf{P}^2_R$, wobei

$$F_1 = Y_1^2 Z_1 + a_1 X_1 Y_1 Z_1 + a_{3,1} Y_1 Z_1^2 - \pi X_1^3 - a_2 X_1^2 Z_1 - a_{4,1} X_1 Z_1^2 - a_{6,2} Z_1^3.$$

Um dies zu sehen, betrachte man folgende Überdeckung von $\mathcal{V}_1$ durch offene Mengen:

- In $Z \neq 0,\ X_1 \neq 0$ ist $\mathcal{V}_1$ in $\mathit{Spec}\ R[\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}, \frac{Y_1}{X_1}, \frac{Z_1}{X_1}]$ durch folgende Gleichungen gegeben:

$$\frac{Y}{Z} = \frac{Y_1}{X_1}\frac{X}{Z}, \qquad \pi = \frac{Z_1}{X_1}\frac{X}{Z} \qquad \text{und}$$

$$\left(\frac{Y_1}{X_1}\right)^2 + a_1\frac{Y_1}{X_1} + a_{3,1}\frac{Y_1}{X_1}\frac{Z_1}{X_1} - \frac{X}{Z} - a_2 - a_{4,1}\frac{Z_1}{X_1} - a_{6,2}\left(\frac{Z_1}{X_1}\right)^2 = 0\,.$$

  Somit gibt es einen R-Isomorphismus von $\mathit{Spec}\ R[\frac{Y_1}{X_1}, \frac{Z_1}{X_1}]/(\frac{F_1}{X_1^3})$ auf das Unterschema $\mathcal{V}_1 - (\overline{\{(Z)\}} \cup \overline{\{(X_1)\}})$ vermöge des Ringisomorphismus

$$\frac{X}{Z} \mapsto \left(\frac{Y_1}{X_1}\right)^2 + a_1\frac{Y_1}{X_1} + a_{3,1}\frac{Y_1}{X_1}\frac{Z_1}{X_1} - a_2 - a_{4,1}\frac{Z_1}{X_1} - a_{6,2}\left(\frac{Z_1}{X_1}\right)^2,$$

$$\frac{Y}{Z} \mapsto \frac{Y_1}{X_1}\frac{X}{Z}, \qquad \frac{Y_1}{X_1} \mapsto \frac{Y_1}{X_1} \qquad \text{und} \qquad \frac{Z_1}{X_1} \mapsto \frac{Z_1}{X_1}.$$

- In $Z \neq 0,\ Z_1 \neq 0$ ist $\mathcal{V}_1$ in $\mathit{Spec}\ R[\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}, \frac{X_1}{Z_1}, \frac{Y_1}{Z_1}]$ durch folgende Gleichungen gegeben:

$$\frac{X}{Z} = \frac{X_1}{Z_1}\pi, \qquad \frac{Y}{Z} = \frac{Y_1}{Z_1}\pi \qquad \text{und} \qquad \frac{F_1^*}{Z_1^2} = 0\,.$$

  Somit gibt es einen R-Isomorphismus von $\mathit{Spec}\ R[\frac{X_1}{Z_1}, \frac{Y_1}{Z_1}]/(\frac{F_1}{Z_1^3})$ auf das Unterschema $\mathcal{V}_1 - (\overline{\{(Z)\}} \cup \overline{\{(Z_1)\}})$ vermöge des Ringisomorphismus

$$\frac{X}{Z} \mapsto \frac{X_1}{Z_1}\pi, \quad \frac{Y}{Z} \mapsto \frac{Y_1}{Z_1}\pi, \quad \frac{Y_1}{X_1} \mapsto \frac{Y_1}{X_1} \quad \text{und} \quad \frac{Z_1}{X_1} \mapsto \frac{Z_1}{X_1},$$

  denn $\frac{F_1^*}{Z_1^2}$ wird dabei auf $\frac{F_1}{Z_1^3}$ abgebildet.

- In $Z \neq 0$ folgt aus $X_1 = Z_1 = 0$ wegen $F_1^* = 0$ auch $Y_1 = 0$. Somit liegen in $Z \neq 0,\ X_1 = Z_1 = 0$ keine Punkte von $\mathcal{V}_1$. Punkte von $\mathcal{V}_1$ in $Z = 0,\ X \neq 0$ liegen auch in $Y \neq 0$, da dort $\mathit{Proj}\ \mathcal{S}(U_X) \cong U_X$ und $F = 0$ ist. Und da aus $Z = F = 0$ auch $X = 0$ folgt, handelt es sich dabei nur um den Punkt $X = Z = 0$. Dieser Punkt liegt wegen $Y \neq 0$ in dem Teil von $\mathcal{V}_1$, in dem gilt

$$G := 1 + a_1\frac{X}{Y} + a_3\frac{Z}{Y} - a_2\left(\frac{X}{Y}\right)^2 - a_4\frac{X}{Y}\frac{Z}{Y} - a_6\left(\frac{Z}{Y}\right)^2 \neq 0.$$

  Also betrachte man als dritte offene Menge

$$\mathcal{V}_1 - (\overline{\{(Y)\}} \cup \overline{\{(G)\}}) = \mathit{Spec}\left(R[\frac{X}{Y}, \frac{Z}{Y}]/\left(\frac{F}{Y^3}\right)\right)_G$$

Diese ist isomorph zu $Spec\ \left(R\,[\frac{X_1}{Y_1},\frac{Z_1}{Y_1}]/\left(\frac{F_1}{Y_1^3}\right)\right)_{G_1}$, wobei

$$G_1 \ := \ 1 + a_1\frac{X_1}{Y_1} + a_{3,1}\frac{Z_1}{Y_1} - a_2\left(\frac{X_1}{Y_1}\right)^2 - a_{4,1}\frac{X_1}{Y_1}\frac{Z_1}{Y_1} - a_{6,2}\left(\frac{Z_1}{Y_1}\right)^2$$

ist, vermöge des Ringmorphismus

$$\frac{X_1}{Y_1} \ \mapsto \ \frac{X}{Y}, \qquad \frac{Z_1}{Y_1} \ \mapsto \ \pi\frac{Z}{Y}.$$

Dabei beachte man daß $\frac{F_1}{Y_1^3}$ auf $\pi\frac{F}{Y^3}$, sowie G_1 auf G abgebildet wird und daß $\frac{F}{Y^3} = \frac{Z}{Y}G - \left(\frac{X}{Y}\right)^3 = 0$ ist. Dieser Ringmorphismus ist ein Isomorphismus, denn die Inverse ist wegen $\frac{F_1}{Y_1^3} = \frac{Z_1}{Y_1}G_1 - \pi\left(\frac{X_1}{Y_1}\right)^3 = 0$ gegeben durch

$$\frac{X}{Y} \ \mapsto \ \frac{X_1}{Y_1}, \qquad \frac{Z}{Y} \ \mapsto \ \frac{1}{G_1}\cdot\left(\frac{X_1}{Y_1}\right)^3.$$

Diese drei Isomorphismen lassen sich zusammenkleben, da je zwei von ihnen auf dem gemeinsamen Definitionsbereich übereinstimmen. Sie kommen dort von der Zuordnung

$$X_1 \ \mapsto \ X, \qquad Y_1 \ \mapsto \ Y, \qquad Z_1 \ \mapsto \ \pi Z.$$

$Proj\ \ R\,[X_1,Y_1,Z_1]/(F_1)$ wird überdeckt von den offenen Mengen $X_1 \neq 0$, $Z_1 \neq 0$ und $Y_1 \neq 0$. Aus $X_1 = Z_1 = 0$ folgt $G_1 \neq 0$. Deshalb wird $Proj\ \ R\,[X_1,Y_1,Z_1]/(F_1)$ auch von den Bildern der drei Isomorphismen überdeckt.

Somit bekommt man $\mathcal{V}_1 = Proj\ \ R\,[X_1,Y_1,Z_1]/(F_1)$, mit

$$F_1 \ = \ Y_1^2Z_1 + a_1X_1Y_1Z_1 + a_{3,1}Y_1Z_1^2 - \pi X_1^3 - a_2X_1^2Z_1 - a_{4,1}X_1Z_1^2 - a_{6,2}Z_1^3.$$

$\widetilde{\mathcal{V}}_1$ besteht aus folgenden Komponenten:

- $C_1 = Proj\ \ k\,[X_1,Y_1,Z_1]/(Z_1)$ und
- $C_2 = Proj\ \ k\,[X_1,Y_1,Z_1]/(G_1)$, wobei

$$G_1 \ = \ Y_1^2 + a_1X_1Y_1 + a_{3,1}Y_1Z_1 - a_2X_1^2 - a_{4,1}X_1Z_1 - a_{6,2}Z_1^2.$$

Es ist dabei $\mathcal{W}^0 = \mathcal{V}_1 - C_2$, denn nach Satz 2.32 ist $\mathcal{W}^0 = \mathcal{V}_1 - \phi^{-1}(\{(X,Y,\pi)\})$ und unter obigem Isomorphismus wird $\phi^{-1}(\{(X,Y,\pi)\})$ auf C_2 abgebildet. Da $\mathcal{W}^0$ regulär ist, bleibt es bei allen weiteren Aufblasungen unberührt. $\mathcal{W}^0$ enthält den Punkt (X_1,Z_1,π). Falls die ursprüngliche Weierstraß-Gleichung minimal gewesen ist, so ist dies das neutrale Element der Addition auf $\mathcal{E}_k$. Somit besteht $\mathcal{E}^0$ aus E/K und der Komponente C_1, das heißt es gilt

$$\mathcal{W}^0 \ = \ \mathcal{E}^0.$$

Damit ist das Korollar 4.1 bewiesen.

Die weitere Untersuchung von $\mathcal{V}_1$ hängt jetzt davon ab, ob b_2 von π geteilt wird oder nicht. Sie wird dementsprechend in den Abschnitten 5.5 und 5.6 fortgesetzt.

5.5 Beweis von Schritt 2 (2.Teil)

In Schritt 2 ist noch der Fall $v(\Delta) \geq 2$ zu behandeln. Dabei ist $\pi \,|\, a_3,\, a_4,\ \ \pi^2 \,|\, a_6$ und $\pi \not| b_2 = a_1^2 + 4a_2$. b_2 ist die Diskriminante von $Y_1^2 + a_1X_1Y_1 - a_2X_1^2$. Dies bedeutet, daß $Y_1^2 + a_1X_1Y_1 - a_2X_1^2$ zwei verschiedene Nullstellen in $\bar{k}$ hat.

Die bisherige Aufblasung von $\mathcal{W}$ in Abschnitt 5.4 führte zu $\mathcal{V}_1 = \mathit{Proj}\ \ R\,[X_1, Y_1, Z_1]/(F_1)$, wobei

$$F_1 \ = \ Y_1^2Z_1 + a_1X_1Y_1Z_1 + a_{3,1}Y_1Z_1^2 - \pi X_1^3 - a_2X_1^2Z_1 - a_{4,1}X_1Z_1^2 - a_{6,2}Z_1^3$$

war. $\widetilde{\mathcal{V}}_1$ bestand aus den beiden Komponenten C_1 und C_2.

Die Komponente C_1 hat dabei Vielfachheit eins, denn $\pi X_1^3 = Z_1G_1$. Da X_1 und G_1 auf C_1 nicht identisch verschwinden, sind sie Einheiten in dem lokalen Ring $\mathcal{O}_{\mathcal{V}_1,\eta}$ des generischen Punktes η von C_1. Deshalb ist π Uniformisierende für C_1, das heißt Erzeugende des maximalen Ideals von $\mathcal{O}_{\mathcal{V}_1,\eta}$ und verschwindet zur Ordnung 1 auf C_1. Dies bedeutet, daß C_1 einfach ist.

5.5.1 Untersuchung von C_2:

$\underline{C_2 \cap \{Z_1 = 0\}}$: $Y_1^2 + \tilde{a}_1X_1Y_1 - \tilde{a}_2X_1^2 \ = \ 0$ hat über $\bar{k}$ die Punkte $Y_1 + \alpha X_1 \ = \ 0$ und $Y_1 + \beta X_1 = 0$ mit $\alpha + \beta = \tilde{a}_1$ und $\alpha\beta = -\tilde{a}_2$. Dabei ist $\alpha \neq \beta$.

$\underline{C_2 \cap \{X_1 = 0\}}$: $Y_1^2 + \tilde{a}_{3,1}Y_1Z_1 - \tilde{a}_{6,2}Z_1^2 \ = \ 0$ hat über $\bar{k}$ die Punkte $Y_1 + \gamma Z_1 \ = \ 0$ und $Y_1 + \delta Z_1 = 0$ mit $\gamma + \delta = \tilde{a}_{3,1}$ und $\gamma\delta = -\tilde{a}_{6,2}$.

Nun gilt:

C_2 ist über $\bar{k}$ reduzibel

$$\begin{aligned}
\Longleftrightarrow \quad & \text{es zerfällt in} \quad Y_1 + \alpha X_1 + \gamma Z_1 = 0 \quad \text{und} \quad Y_1 + \beta X_1 + \delta Z_1 = 0 \\
& \qquad (\text{oder in} \quad Y_1 + \alpha X_1 + \delta Z_1 = 0 \quad \text{und} \quad Y_1 + \beta X_1 + \gamma Z_1 = 0\,)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Longleftrightarrow \quad \widetilde{G}_1 \ &= \ (Y_1 + \alpha X_1 + \gamma Z_1)(Y_1 + \beta X_1 + \delta Z_1) \\
&= \ Y_1^2 + (\alpha+\beta)X_1Y_1 + (\gamma+\delta)Y_1Z_1 + \alpha\beta X_1^2 + (\alpha\delta + \beta\gamma)X_1Z_1 + \gamma\delta Z_1^2 \\
&= \ Y_1^2 + \tilde{a}_1X_1Y_1 + \tilde{a}_{3,1}Y_1Z_1 - \tilde{a}_2X_1^2 + (\alpha\delta + \beta\gamma)X_1Z_1 - \tilde{a}_{6,2}Z_1^2 \\
& \quad\ (\text{oder } \gamma \text{ und } \delta \text{ vertauscht})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Longleftrightarrow \quad & -\tilde{a}_{4,1} \ = \ \alpha\delta + \beta\gamma \qquad (\text{oder} \quad -\tilde{a}_{4,1} \ = \ \alpha\gamma + \beta\delta\,) \\
\Longleftrightarrow \quad & \tilde{a}_{4,1} \text{ ist Nullstelle von } p(T) \ = \ (T + \alpha\delta + \beta\gamma)(T + \alpha\gamma + \beta\delta) \quad \in \ \bar{k}\,[T].
\end{aligned}$$

Es ist aber

$$\begin{aligned}
p(T) \ &= \ T^2 + (\alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta)T + (\alpha^2\gamma\delta + \beta^2\gamma\delta + \gamma^2\alpha\beta + \delta^2\alpha\beta) \\
&= \ T^2 + (\alpha+\beta)(\gamma+\delta)T + (\alpha^2+\beta^2)\gamma\delta + (\gamma^2+\delta^2)\alpha\beta
\end{aligned}$$

und wegen $\alpha^2+\beta^2 = (\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta = \tilde{a}_1^2 + 2\tilde{a}_2$ und $\gamma^2+\delta^2 = (\gamma+\delta)^2 - 2\gamma\delta = \tilde{a}_{3,1}^2 + 2\tilde{a}_{6,2}$ also

$$p(T) \;=\; T^2 + \tilde{a}_1\tilde{a}_{3,1}T + (\tilde{a}_1^2 + 2\tilde{a}_2)(-\tilde{a}_{6,2}) + (\tilde{a}_{3,1}^2 + 2\tilde{a}_{6,2})(-\tilde{a}_2) \quad \in \quad k\,[T].$$

Somit ist $p(\tilde{a}_{4,1}) = -\,\tilde{b}_{8,2}$ und man sieht:

C_2 zerfällt über $\bar{k}$ in zwei Geraden $\iff \pi^3 \mid b_8 \iff \pi^3 \mid \Delta$.
Die letzte Äquivalenz gilt wegen $\pi^3 \mid -8b_4^3 - 27b_6^2 + 9b_2b_4b_6$.

Also haben wir als ein erstes Resultat:

$$v(\Delta) = 2 \quad \iff \quad C_2 \text{ ist irreduzibel über } \bar{k} \text{ und ist als Kegelschnitt } \cong \mathbf{P}^1_{\bar{k}}.$$

$$v(\Delta) \geq 3 \quad \iff \quad C_2 \text{ zerfällt über } \bar{k} \text{ und } \mathcal{V}_{\bar{k}} \text{ besteht aus } C_1, C_2 \text{ und } C_3.$$

Sei nun $v(\Delta) \geq 3$. Der Schnittpunkt von C_2 und C_3 über $\bar{k}$ ist ohne Einschränkung $Y_1 + \alpha X_1 + \gamma Z_1 \;=\; Y_1 + \beta X_1 + \delta Z_1 \;=\; \pi \;=\; 0$.

Wegen $\alpha - \beta \neq 0$ ist er $\;Y_1 + \alpha X_1 + \gamma Z_1 \;=\; X_1 + \dfrac{\gamma-\delta}{\alpha-\beta}Z_1 \;=\; \pi \;=\; 0$. Da

$$\begin{aligned} \frac{\gamma-\delta}{\alpha-\beta} \;&=\; \frac{\alpha\gamma-\alpha\delta-\beta\gamma+\beta\delta}{(\alpha-\beta)^2} \;=\; \frac{-2(\alpha\delta+\beta\gamma)+\alpha\gamma+\alpha\delta+\beta\gamma+\beta\delta}{(\alpha-\beta)^2} \\ &=\; \frac{2\tilde{a}_{4,1}+\tilde{a}_{3,1}\tilde{a}_1}{\tilde{a}_1^2+4\tilde{a}_2} \quad \in \quad k \end{aligned}$$

ist, gibt es ein $r \in R$ mit $r \equiv -\dfrac{\gamma-\delta}{\alpha-\beta} \mod \pi$.

Die Translation $X_1 \to X_1 + rZ_1,\; Y_1 \to Y_1,\; Z_1 \to Z_1$ führt zu

$$\begin{aligned} \gamma \;&\to\; -\alpha\frac{\gamma-\delta}{\alpha-\beta}+\gamma \;=\; \frac{\alpha\delta-\alpha\gamma+\alpha\gamma-\beta\gamma}{\alpha-\beta} \;=\; \frac{\alpha\delta-\beta\gamma}{\alpha-\beta} \qquad \text{und zu} \\ \delta \;&\to\; -\beta\frac{\gamma-\delta}{\alpha-\beta}+\delta \;=\; \frac{\beta\delta-\beta\gamma+\alpha\delta-\beta\gamma}{\alpha-\beta} \;=\; \frac{\alpha\delta-\beta\gamma}{\alpha-\beta}, \end{aligned}$$

also zu $\gamma = \delta$. Diese Translation bewirkt auf der generischen Faser E/K die Translation $X \to X + r\pi Z,\; Y \to Y,\; Z \to Z$. Nach Satz 2.28 bedeutet dies, daß die Annahmen $\pi \mid a_3,\, a_4,\;\; \pi^2 \mid a_6$ dadurch nicht zerstört werden.

Da γ nun doppelte Nullstelle von $T^2 + \tilde{a}_{3,1}T - \tilde{a}_{6,2}$ und k perfekt ist, folgt $\gamma \in k$. Somit gibt es ein $t \in R$ mit $t \equiv -\gamma \mod \pi$.

Eine weitere Translation $X_1 \to X_1,\; Y_1 \to Y_1 + tZ_1,\; Z_1 \to Z_1$ führt zu $\gamma = \delta = 0$. Sie bewirkt auf der generischen Faser E/K die Translation $X \to X,\; Y \to Y + t\pi Z,\; Z \to Z$.

Deshalb kann man nach Satz 2.28 ohne Einschränkung annehmen, daß $\pi \mid a_{3,1},\, a_{4,1},\, a_{6,2}$. Damit gilt $\pi \nmid b_2,\;\; \pi^2 \mid b_4,\;\; \pi^3 \mid b_6,\, b_8$. Man erhällt

$$F_1 \;=\; Z_1(Y_1^2 + a_1X_1Y_1 + \pi a_{3,2}Y_1Z_1 - a_2X_1^2 - \pi a_{4,2}X_1Z_1 - \pi a_{6,3}Z_1^2) - \pi X_1^3.$$

Der Schnittpunkt von C_2 und C_3 ist jetzt (X_1, Y_1, π).

5.5.2 Die singulären Punkte von $\mathcal{V}_1$

Da $\mathbf{P}^2_R$ ein reguläres dreidimensionales Schema ist, wird das maximale Ideal des lokalen Ringes eines jeden abgeschlossenen Punktes von drei Elementen erzeugt. Somit werden auch auf dem Unterschema $\mathcal{V}_1$ höchstens drei Elemente zum Erzeugen des maximalen Ideals eines abgeschlossenen Punktes benötigt.

Sei nun $P \in \widetilde{\mathcal{V}}_1$ ein abgeschlossener Punkt und $\mathcal{M}$ das maximale Ideal in $\mathcal{O}_{\mathcal{V}_1,P}$.

Für $v(\Delta) = 2$

Auf $\mathcal{V}_1 - C_2$ liegen keine singulären Punkte, da $\mathcal{V}_1 - C_2 \cong \mathcal{W}^0$ und $\mathcal{W}^0$ regulär ist.

$P \in C_1 \cap C_2$:
dann ist $\mathcal{M} = (Z_1,\, g(X_1,Y_1),\, \pi)$ und $X_1 \notin \mathcal{M}$, da sonst wegen $G_1 = 0$ auch $Y_1 \in \mathcal{M}$ wäre, was jedoch nicht sein kann, da dann $X_1 = Y_1 = Z_1 = 0$ wäre. Das heißt X_1 ist invertierbar in $\mathcal{O}_{\mathcal{V}_1,P}$. Damit ist $\pi = \frac{Z_1G_1}{X_1^3}$ und also $\mathcal{M} = (Z_1,\, g(X_1,Y_1))$, das heißt P ist regulär.

$C_2 - C_1$ ist als Schema ein regulärer Kegelschnitt in $\mathbf{P}^2_k$ und damit nach Satz 2.21 auch als Teilmenge von $\mathcal{V}_1$ regulär.

Die Komponente C_2 hat ebenfalls Vielfachheit eins, denn $\pi X_1^3 = Z_1G_1$. Da X_1 und Z_1 auf C_2 nicht identisch verschwinden, sind sie Einheiten in dem lokalen Ring $\mathcal{O}_{\mathcal{V}_1,\eta}$ des generischen Punktes η von C_2. Deshalb ist π Uniformisierende für C_2, das heißt Erzeugende des maximalen Ideals von $\mathcal{O}_{\mathcal{V}_1,\eta}$ und verschwindet zur Ordnung 1 auf C_2. Dies bedeutet, daß C_2 einfach ist.

$\mathcal{V}_1$ ist regulär und als abgeschlossenes Unterschema von $\mathbf{P}^2_R$ auch eigentlich über R. Da C_1 und C_2 über $\bar{k}$ isomorph zu $\mathbf{P}^1_{\bar{k}}$ sind und sich in zwei verschiedenen Punkten transversal schneiden hat man den Reduktionstyp I_2, es folgt, daß $\mathcal{V}_1$ minimal ist und $\mathcal{C} = \mathcal{V}_1$. Es ist $m = 2$ und $c = 2$.

Für $v(\Delta) \geq 3$

Auf $\mathcal{V}_1 - (C_2 \cup C_3)$ liegen keine singulären Punkte, da $\mathcal{V}_1 - (C_2 \cup C_3) \cong \mathcal{W}^0$ und $\mathcal{W}^0$ regulär ist.

$P \in C_1 \cap (C_2 \cup C_3)$:
dann ist $\mathcal{M} = (Z_1,\, g(X_1,Y_1),\, \pi)$ und $X_1 \notin \mathcal{M}$, da sonst wegen $G_1 = 0$ auch $Y_1 \in \mathcal{M}$ wäre, was jedoch nicht sein kann. Das heißt X_1 ist invertierbar in $\mathcal{O}_{\mathcal{V}_1,P}$. Damit ist $\pi = \frac{Z_1G_1}{X_1^3}$ und also $\mathcal{M} = (Z_1,\, g(X_1,Y_1))$, das heißt P ist regulär.

$P \in (C_2 \cup C_3) - C_1,\;\; P \neq \{(X_1,Y_1,\pi)\}$:
dann ist $\mathcal{M} = (g(X_1,Y_1),\, p(X_1,Y_1,Z_1),\, \pi)$, wobei $G_1 \equiv g(X_1,Y_1) \cdot h \mod (p,\pi)$ in $R\,[X_1,Y_1,Z_1]$, da $G_1 \in \mathcal{M}$. Also etwa $\tilde{g} = Y_1 - \alpha X_1$ falls $\alpha \in k$ oder $\tilde{g} = Y_1^2 + \tilde{a}_1X_1Y_1 - \tilde{a}_2X_1^2$ falls $\alpha \notin k$.

Es ist $Z_1 \notin \mathcal{M}$ und auch $h \notin \mathcal{M}$, da sonst wegen $\alpha \neq \beta$ folgen würde, daß $X_1 \in \mathcal{M}$ und damit $Y_1 \in \mathcal{M}$ wäre. Dies bedeutete aber $P = (X_1, Y_1, \pi)$. Somit gilt

$$g \equiv \frac{\pi}{hZ_1}(a_{3,2}Y_1Z_1^2 - X_1^3 - a_{4,2}X_1Z_1^2 - a_{6,3}Z_1^3) \mod (p, \pi).$$

Das bedeutet $\mathcal{M} = (p(X_1, Y_1, Z_1), \pi)$ und P ist regulär.

Sei jetzt $P = (X_1, Y_1, \pi)$:
dann ist $\mathcal{M} = (X_1, Y_1, \pi)$, und $Z_1 \notin \mathcal{M}$.

Aus $v(\Delta) = 3$ folgt $v(b_8) = 3$, da alle Summanden in Δ außer b_2b_8 durch π^5 teilbar sind und $v(b_2) = 0$ ist. Wegen $b_8 = b_2a_6 - a_1a_3a_4 + a_2a_3^2 - a_4^2$ und $\pi^2 \mid a_3,\, a_4$ folgt $v(a_6) = v(b_2a_6) = v(b_8) = 3$. Somit ist

$$\pi \sim a_{6,2} = \frac{1}{Z_1^3}(Y_1^2Z_1 + a_1X_1Y_1Z_1 + \pi a_{3,2}Y_1Z_1^2 - \pi X_1^3 - a_2X_1^2Z_1 - \pi a_{4,2}X_1Z_1^2),$$

$\mathcal{M} = (X_1, Y_1)$ und P ist regulär.

Die Komponenten C_2 und C_3 haben Vielfachheit eins, denn es ist

$$\pi X_1^3 \equiv (Y_1 + \alpha X_1 + \gamma Z_1)(Y_1 + \beta X_1 + \delta Z_1)Z_1 \mod \pi.$$

Da X_1, Z_1 und ohne Einschränkung $Y_1 + \beta X_1 + \delta Z_1$ auf C_2 nicht identisch verschwinden, sind sie Einheiten in dem lokalen Ring $\mathcal{O}_{\mathcal{V}_1,\eta}$ des generischen Punktes η von C_2. Deshalb ist π Erzeugende des maximalen Ideals von $\mathcal{O}_{\mathcal{V}_1,\eta}$ und verschwindet zur Ordnung 1 auf C_2. Dies bedeutet, daß C_2 einfach ist. Ebenso ist C_3 einfach.

Also ist $\mathcal{V}_1$ regulär und als abgeschlossenes Unterschema von $\mathbf{P}_R^2$ auch eigentlich über R. Da C_1, C_2 und C_3 über $\bar{k}$ isomorph zu $\mathbf{P}_{\bar{k}}^1$ sind und je zwei der Komponenten sich in einem Punkt transversal schneiden hat man den Reduktionstyp I_3, es folgt, daß $\mathcal{V}_1$ minimal ist und $\mathcal{C} = \mathcal{V}_1$. Es ist $m = 3$ und $c = 3$, falls $k' = k$ und $c = 1$, falls $k' \neq k$.

Aus $v(\Delta) \geq 4$ folgt $v(b_8) \geq 4$, da alle Summanden in Δ außer b_2b_8 durch π^5 teilbar sind und $v(b_2) = 0$ ist. Daraus folgt wie eben $v(a_6) \geq 4$.

Man hat nun

$$F_1 = Y_1^2Z_1 + a_1X_1Y_1Z_1 + \pi a_{3,2}Y_1Z_1^2 - \pi X_1^3 - a_2X_1^2Z_1 - \pi a_{4,2}X_1Z_1^2 - \pi^2 a_{6,4}Z_1^3\,.$$

Somit ist $F_1 \in (X_1, Y_1, \pi)^2 \subset R[X_1, Y_1, Z_1]$ und deshalb folgt wie in Abschnitt 5.4, daß $X_1, Y_1, \pi \bmod \mathcal{M}^2$ über $k = \mathcal{O}_{\mathcal{V}_1,P}/\mathcal{M}$ linear unabhängig sind und daß P singulärer Punkt ist.

5.5.3 Aufblasen von $\mathcal{V}_1$ entlang $(X_1,\, Y_1,\, \pi)$

Wir haben bisher: $\pi^2 \mid a_3,\, a_4,\;\; \pi^4 \mid a_6,\;\; \pi^2 \mid b_4,\;\; \pi^4 \mid b_6,\, b_8,\;\; \pi^4 \mid \Delta$.

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_1 &= \mathit{Proj}\ R[X_1, Y_1, Z_1]/(F_1), \qquad \text{mit} \\ F_1 &= Y_1^2Z_1 + a_1X_1Y_1Z_1 + \pi a_{3,2}Y_1Z_1^2 - \pi X_1^3 - a_2X_1^2Z_1 - \pi a_{4,2}X_1Z_1^2 - \pi^2 a_{6,4}Z_1^3. \end{aligned}$$

Sei nun

$$\mathcal{I} = (X_1,\, Y_1,\, \pi), \qquad \mathcal{S} = \bigoplus_{d\geq 0} \mathcal{I}^d$$

Über den affinen, offenen Mengen ergibt sich:

$\underline{Y_1 \neq 0:}$ $\quad U_{Y_1} \;=\; Spec\;\; R\,[\frac{X_1}{Y_1},\frac{Z_1}{Y_1}]$

Da (X_1, Y_1, π) nicht in U_{Y_1} liegt, erhält man $Proj\;\; \mathcal{S}(U_{Y_1}) \cong Spec\;\; R\,[\frac{X_1}{Y_1},\frac{Z_1}{Y_1}]$.

$\phi_{Y_1} : Proj\;\; \mathcal{S}(U_{Y_1}) \to U_{Y_1}$ ist der Isomorphismus $R\,[\frac{X_1}{Y_1},\frac{Z_1}{Y_1}] \to R\,[\frac{X_1}{Y_1},\frac{Z_1}{Y_1}]$.

$\underline{X_1 \neq 0:}$ $\quad$ analog zu $Y_1 \neq 0$

$\underline{Z_1 \neq 0:}$ $\quad U_{Z_1} \;=\; Spec\;\; R\,[\frac{X_1}{Z_1},\frac{Y_1}{Z_1}]$

Man hat die surjektive Abbildung $R\,[\frac{X_1}{Z_1},\frac{Y_1}{Z_1}][X_2, Y_2, Z_2] \to \mathcal{S}(U_{Z_1})$ durch die Zuordnung $(X_2, Y_2, Z_2) \mapsto (\frac{X_1}{Z_1},\frac{Y_1}{Z_1},\pi)$.

Ihr Kern ist $I_{Z_1} = (X_2\frac{Y_1}{Z_1} - Y_2\frac{X_1}{Z_1},\; X_2\pi - Z_2\frac{X_1}{Z_1},\; Y_2\pi - Z_2\frac{Y_1}{Z_1})$.

Also ergibt sich $\mathcal{S}(U_{Z_1}) \cong R\,[\frac{X_1}{Z_1},\frac{Y_1}{Z_1}][X_2, Y_2, Z_2]/I_{Z_1}$.

$\phi_{Z_1} : Proj\;\; \mathcal{S}(U_{Z_1}) \to U_{Z_1}$ ist gegeben durch $R\,[\frac{X_1}{Z_1},\frac{Y_1}{Z_1}] \to \mathcal{S}(U_{Z_1})$.

Durch Zusammenkleben bekommt man $\mathbf{Proj}\;\mathcal{S}$ als Unterschema von $\mathbf{P}^2_R \times_{Spec\,R} \mathbf{P}^2_R$ und den Morphismus $\phi:\; \mathbf{Proj}\;\mathcal{S} \longrightarrow Proj\;\; R\,[X_1, Y_1, Z_1]$.

Die strikte Transformation von $\mathcal{V}_1$ erhält man gemäß Satz 2.32 als den Abschluß

$\mathcal{V}_2 \;:=\; \overline{\phi^{-1}(\mathcal{V}_1 - \{(X_1, Y_1, \pi)\})}$ in $\mathbf{Proj}\;\mathcal{S}$.

Über dem affinen Teil $Z_1 \neq 0$ von $\mathcal{V}_1$ liegen dabei folgende Teile von $\mathcal{V}_2$:

In $X_2 \neq 0:$ $\quad \Rightarrow \quad \dfrac{Y_1}{Z_1} \;=\; \dfrac{Y_2}{X_2}\dfrac{X_1}{Z_1}$ und $\pi \;=\; \dfrac{Z_2}{X_2}\dfrac{X_1}{Z_1}$. Damit folgt

$$\begin{aligned} X_2^2 \cdot \frac{F_1}{Z_1^3} \;&=\; \left(\frac{X_1}{Z_1}\right)^2 (\,Y_2^2 + a_1X_2Y_2 + a_{3,2}Y_2Z_2 - \\ &\qquad - \pi\frac{X_1}{Z_1}X_2^2 - a_2X_2^2 - a_{4,2}X_2Z_2 - a_{6,4}Z_2^2\,) \;=\; 0. \end{aligned}$$

Falls $\frac{X_1}{Z_1} = 0$, so folgt $\frac{Y_1}{Z_1} = \pi = 0$ und der Punkt ist $\notin \phi^{-1}(\mathcal{V}_1 - \{(X_1, Y_1, \pi)\})$. Also bleibt nur

$$F_2 \;:=\; Y_2^2 + a_1X_2Y_2 + a_{3,2}Y_2Z_2 - \pi\frac{X_1}{Z_1}X_2^2 - a_2X_2^2 - a_{4,2}X_2Z_2 - a_{6,4}Z_2^2 \;=\; 0.$$

In $Y_2 \neq 0:$ $\quad \Rightarrow \quad \dfrac{X_1}{Z_1} \;=\; \dfrac{X_2}{Y_2}\dfrac{Y_1}{Z_1}$ und $\pi \;=\; \dfrac{Z_2}{Y_2}\dfrac{Y_1}{Z_1}$. Damit folgt

$$\begin{aligned} Y_2^2 \cdot \frac{F_1}{Z_1^3} \;&=\; \left(\frac{Y_1}{Z_1}\right)^2 (\,Y_2^2 + a_1X_2Y_2 + a_{3,2}Y_2Z_2 - \\ &\qquad - \pi\frac{X_1}{Z_1}X_2^2 - a_2X_2^2 - a_{4,2}X_2Z_2 - a_{6,4}Z_2^2\,) \;=\; 0. \end{aligned}$$

Falls $\frac{Y_1}{Z_1} = 0$, so folgt $\frac{X_1}{Z_1} = \pi = 0$ und der Punkt ist $\notin \phi^{-1}(\mathcal{V}_1 - \{(X_1, Y_1, \pi)\})$.

Also bleibt nur $F_2 = 0$.

In $Z_2 \neq 0$: $\quad \Rightarrow \quad \dfrac{X_1}{Z_1} = \dfrac{X_2}{Z_2}\pi$ und $\dfrac{Y_1}{Z_1} = \dfrac{Y_2}{Z_2}\pi$. Damit folgt

$$Z_2^2 \cdot \frac{F_1}{Z_1^3} = \pi^2(Y_2^2 + a_1 X_2 Y_2 + a_{3,2} Y_2 Z_2 - \pi \frac{X_1}{Z_1} X_2^2 - a_2 X_2^2 - a_{4,2} X_2 Z_2 - a_{6,4} Z_2^2) = 0.$$

Falls $\pi = 0$, so folgt $\frac{X_1}{Z_1} = \frac{Y_1}{Z_1} = 0$ und der Punkt ist $\notin \phi^{-1}(\mathcal{V}_1 - \{(X_1, Y_1, \pi)\})$.
Also bleibt nur $F_2 = 0$.

Man bekommt also $\mathcal{V}_2$ durch das Ideal (F_2) in **Proj** $\mathcal{S}$.

$\widetilde{\mathcal{V}}_2$ besteht aus folgenden Komponenten:

- $\underline{Z_1 = 0} \Rightarrow X_1 \neq 0$ oder $Y_1 \neq 0$. Dies ist die Komponente C_1 von $\mathcal{V}_1$, die in $R\,[X_1, Y_1, Z_1]$ liegt. Sie ist ein $\mathbf{P}^1_k$ mit dem Parameter $\frac{X_1}{Y_1}$ beziehungsweise $\frac{Y_1}{X_1}$.

  Sei jetzt $Z_1 \neq 0$. Aus $\pi = 0$ folgt dann $Z_2 \frac{X_1}{Z_1} = Z_2 \frac{Y_1}{Z_1} = 0$. Sei zuerst
- $\underline{Z_2 = 0}$. Wegen $F_2 = 0$ folgt daraus $\underline{Y_2^2 + a_1 X_2 Y_2 - a_2 X_2^2 = 0}$. Da nicht zugleich $X_2 = Y_2 = Z_2 = 0$ sein kann, folgt $X_2 \neq 0 \Rightarrow \underline{\frac{Y_1}{Z_1} = \frac{Y_2}{X_2}\frac{X_1}{Z_1}}$. Dies sind die Komponenten C_2 und C_3 von $\mathcal{V}_1$. Der Parameter ist $\frac{X_1}{Z_1}$. Zuletzt fehlt noch
- $\underline{\frac{X_1}{Z_1} = \frac{Y_1}{Z_1} = 0} \Rightarrow \underline{Y_2^2 + a_1 X_2 Y_2 + a_{3,2} Y_2 Z_2 - a_2 X_2^2 - a_{4,2} X_2 Z_2 - a_{6,4} Z_2^2 = 0}$ wegen $F_2 = 0$. Diese Komponente ist bei der Aufblasung neu hinzugekommen, sie heiße C_4. Ihr Parameter ist $\frac{X_2}{Z_2}$ beziehungsweise $\frac{Z_2}{X_2}$.

Die Komponenten C_2 und C_3 haben dabei Vielfachheit eins. Denn $\pi X_2 = \frac{X_1}{Z_1} Z_2$ und aus $F_2 = 0$ folgt

$$(Y_2 + \alpha X_2)(Y_2 + \beta X_2)\frac{X_1}{Z_1} \equiv \pi X_2(-a_{3,2} Y_2 + \left(\frac{X_1}{Z_1}\right)^2 X_2 + a_{4,2} X_2 + a_{6,4} Z_2) \mod \pi.$$

Die Terme $Y_2 + \beta X_2$ und $\frac{X_1}{Z_1}$ verschwinden nicht identisch auf C_2 und sind somit Einheiten in dem lokalen Ring $\mathcal{O}_{\mathcal{V}_2,\eta}$ des generischen Punktes η von C_2. Deshalb ist π Erzeugende des maximalen Ideals von $\mathcal{O}_{\mathcal{V}_2,\eta}$ und verschwindet zur Ordnung 1 auf C_2. Dies bedeutet, daß C_2 einfach ist. Ebenso ist C_3 einfach.

Die Untersuchung von C_4 verläuft analog der von C_2 in Abschnitt 5.5.1:

$\underline{C_4 \cap \{Z_2 = 0\}:}$ $\quad Y_2^2 + a_1 X_2 Y_2 - a_2 X_2^2 = (Y_2 + \alpha X_2)(Y_2 + \beta X_2) = 0$ über $\bar{k}$

$\underline{C_4 \cap \{X_2 = 0\}:}$ $\quad Y_2^2 + a_{3,2} Y_2 Z_2 - a_{6,4} Z_2^2 = (Y_2 + \gamma' Z_2)(Y_2 + \delta' Z_2) = 0$ über $\bar{k}$

Man erhält C_4 irreduzibel über $\bar{k} \iff \pi^5 \mid b_8 \iff \pi^5 \mid \Delta$.

Die Resultate sind also:

$v(\Delta) = 4 \iff C_4$ ist irreduzibel über $\bar{k}$ und $\cong \mathbf{P}^1_{\bar{k}}$.

$v(\Delta) \geq 5 \iff C_4$ zerfällt über $\bar{k}$ in die zwei Komponenten

$$C_4 : \; Y_2 + \alpha X_2 + \gamma' Z_2 = 0 \qquad \text{und} \qquad C_5 : \; Y_2 + \beta X_2 + \delta' Z_2 = 0.$$

Sei nun $v(\Delta) \geq 5$. Wie in Abschnitt 5.5.1 kann man dann ohne Einschränkung annehmen, daß $\pi \mid a_{3,2},\ a_{4,2},\ a_{6,4}$. Damit gilt $\pi \nmid b_2,\ \ \pi^3 \mid b_4,\ \ \pi^5 \mid b_6,\ b_8$. Man erhällt

$$F_2 \ = \ Y_2^2 + a_1 X_2 Y_2 + \pi a_{3,3} Y_2 Z_2 - \pi \frac{X_1}{Z_1} X_2^2 - a_2 X_2^2 - \pi a_{4,3} X_2 Z_2 - \pi a_{6,5} Z_2^2.$$

5.5.4 Die singulären Punkte von $\mathcal{V}_2$

Da $\mathbf{P}^2_R \times_{Spec\,R} \mathbf{P}^2_R$ ein reguläres fünfdimensionales Schema ist, wird das maximale Ideal des lokalen Ringes eines jeden abgeschlossenen Punktes von fünf Elementen erzeugt. Somit werden auch auf dem Unterschema $\mathcal{V}_2$ höchstens fünf Elemente zum Erzeugen des maximalen Ideals eines abgeschlossenen Punktes benötigt.

Sei nun $P \in \widetilde{\mathcal{V}}_2$ ein abgeschlossener Punkt und $\mathcal{M}$ das maximale Ideal in $\mathcal{O}_{\mathcal{V}_2,P}$.

Die Untersuchung wird gleichzeitig für $v(\Delta) = 4$ und $v(\Delta) \geq 5$ durchgeführt. Bei $v(\Delta) = 4$ ist die Komponente C_4 irreduzibel über $\bar{k}$. Bei $v(\Delta) \geq 5$ ist jeweils C_4 durch $(C_4 \cup C_5)$ zu ersetzen. Die Aussagen behalten dabei ihre Gültigkeit.

$\underline{\text{Auf } \mathcal{V}_2 - C_4}$ liegen keine singulären Punkte, da $\mathcal{V}_2 - C_4 \cong \mathcal{V}_1 - \{(X_1, Y_1, \pi)\}$ und somit regulär ist.

$\underline{P \in C_4 \cap (C_2 \cup C_3)\text{:}}$
dann ist $\mathcal{M} = (\frac{X_1}{Z_1}, \frac{Y_1}{Z_1}, Z_2,\ g(X_2, Y_2),\ \pi)$, wobei $G_2 \equiv g(X_2, Y_2) \cdot h \bmod \pi$ in $R\,[X_2, Y_2]$ und $G_2 = Y_2^2 + a_1 X_2 Y_2 - a_2 X_2^2 \in \mathcal{M}$ ist. Es ist $X_2 \notin \mathcal{M}$, da sonst wegen $G_2 = 0$ auch $Y_2 \in \mathcal{M}$ wäre. Außerdem ist $h \notin \mathcal{M}$, da sonst wegen $\alpha \neq \beta$ folgen würde, daß $X_2 \in \mathcal{M}$. Nun betrachte man die affine Umgebung $X_2 \neq 0$ von P. Dort gilt $\frac{Y_1}{Z_1} = \frac{Y_2}{X_2} \frac{X_1}{Z_1}$ und $\pi = \frac{Z_2}{X_2} \frac{X_1}{Z_1}$. Ferner ist

$$g \ \equiv \ \frac{\pi}{h}(-a_{3,3} Y_2 Z_2 + \frac{X_1}{Z_1} X_2^2 + a_{4,3} X_2 Z_2 + a_{6,5} Z_2^2) \quad \bmod \pi.$$

Das bedeutet $\mathcal{M} = (\frac{X_1}{Z_1}, Z_2)$ und P ist regulär. Man beachte, daß es bei dieser Überlegung keine Rolle spielt, ob der Term $\frac{X_1}{Z_1} X_2^2$ noch eine Potenz von π als zusätzlichen Faktor besitzt.

Für $v(\Delta) = 4$ gilt:

$\underline{C_4 - (C_2 \cup C_3)}$ ist als Schema isomorph zu $\mathbf{P}^1_k$, also ein regulärer Kegelschnitt und damit nach Satz 2.21 auch als Teilmenge von $\mathcal{V}_2$ regulär.

Die Vielfachheit der Komponente C_4 ist eins. Da Z_2 auf C_4 nicht identisch verschwindet, ist es eine Einheit in $\mathcal{O}_{\mathcal{V}_2,\eta}$, dem lokalen Ring des generischen Punktes η von C_4. Damit ist $\frac{X_1}{Z_1} = \frac{X_2}{Z_2}\pi,\ \ \frac{Y_1}{Z_1} = \frac{Y_2}{Z_2}\pi$ und

$$Y_2^2 + a_1 X_2 Y_2 + a_{3,2} Y_2 Z_2 - a_2 X_2^2 - a_{4,2} X_2 Z_2 - a_{6,4} Z_2^2 \ = \ \pi \frac{X_1}{Z_1} X_2^2.$$

Also ist π Erzeugende des maximalen Ideals von $\mathcal{O}_{\mathcal{V}_2,\eta}$ und verschwindet zur Ordnung 1 auf C_4. Dies bedeutet, daß C_4 einfach ist.

Also ist $\mathcal{V}_2$ regulär und als abgeschlossenes Unterschema von $\mathbf{P}^2_R \times_{Spec\,R} \mathbf{P}^2_R$ auch eigentlich über R. Die Komponenten C_1 bis C_4 sind über $\bar{k}$ isomorph zu $\mathbf{P}^1_{\bar{k}}$ und in einem Viereck angeordnet. Deshalb hat man den Reduktionstyp I_4, es folgt, daß $\mathcal{V}_2$ minimal ist und $\mathcal{C} = \mathcal{V}_2$. Die Komponenten C_1 und C_4 sind über k definiert. Die Komponenten C_2 und C_3 sind nur dann über k definiert, wenn $k' = k$ ist. Somit ist $m = 4$ und $c = 4$, falls $k' = k$ und $c = 2$, falls $k' \neq k$.

Für $v(\Delta) \geq 5$ gilt:

$P \in (C_4 \cup C_5) - (C_2 \cup C_3)$, $P \neq C_4 \cap C_5$:

dann ist $\mathcal{M} = (\frac{X_1}{Z_1}, \frac{Y_1}{Z_1}, g(X_2, Y_2), p(X_2, Y_2, Z_2), \pi)$, wobei $G_2 \equiv g(X_2, Y_2) \cdot h \mod (p, \pi)$ in $R[X_2, Y_2, Z_2]$, da $G_2 \in \mathcal{M}$ ist.

Wegen $P \notin C_2 \cup C_3$ ist $Z_2 \notin \mathcal{M}$. Außerdem ist $h \notin \mathcal{M}$, da sonst wegen $\alpha \neq \beta$ folgen würde, daß $X_2 \in \mathcal{M}$ und damit $Y_2 \in \mathcal{M}$ wäre. Dies bedeutete aber $P = C_4 \cap C_5$. Nun betrachte man die affine Umgebung $Z_2 \neq 0$ von P. Dort gilt $\frac{X_1}{Z_1} = \frac{X_2}{Z_2}\pi$ und $\frac{Y_1}{Z_1} = \frac{Y_2}{Z_2}\pi$. Ferner ist

$$g \equiv \frac{\pi}{h}(-a_{3,3}Y_2Z_2 + \frac{X_1}{Z_1}X_2^2 + a_{4,3}X_2Z_2 + a_{6,5}Z_2^2) \mod (p, \pi).$$

Das bedeutet $\mathcal{M} = (p(X_2, Y_2, Z_2), \pi)$ und P ist regulär. Man beachte, daß es bei dieser Überlegung wieder keine Rolle spielt, ob der Term $\frac{X_1}{Z_1}X_2^2$ noch eine Potenz von π als zusätzlichen Faktor besitzt.

Sei jetzt $P = C_4 \cap C_5$:

dann ist $\mathcal{M} = (\frac{X_1}{Z_1}, \frac{Y_1}{Z_1}, X_2, Y_2, \pi)$, und $Z_2 \notin \mathcal{M}$.

Aus $v(\Delta) = 5$ folgt $v(b_8) = 5$, da alle Summanden in Δ außer b_2b_8 durch π^8 teilbar sind und $v(b_2) = 0$ ist. Wegen $b_8 = b_2a_6 - a_1a_3a_4 + a_2a_3^2 - a_4^2$ und $\pi^3 \mid a_3, a_4$ folgt $v(a_6) = v(b_2a_6) = v(b_8) = 5$. Somit ist

$$\pi \sim a_{6,4} = \frac{1}{Z_2^2}(Y_2^2 + a_1X_2Y_2 + \pi a_{3,3}Y_2Z_2 - \pi\frac{X_1}{Z_1}X_2^2 - a_2X_2^2 - \pi a_{4,3}X_2Z_2).$$

P liegt in der affinen Umgebung $Z_2 \neq 0$. Dort gilt $\frac{X_1}{Z_1} = \frac{X_2}{Z_2}\pi$ und $\frac{Y_1}{Z_1} = \frac{Y_2}{Z_2}\pi$. Also ist $\mathcal{M} = (X_2, Y_2)$ und P ist regulär.

Die Vielfachheit der Komponenten C_4 und C_5 ist eins. Da Z_2 auf C_4 nicht identisch verschwindet, ist es eine Einheit in $\mathcal{O}_{\mathcal{V}_1,\eta}$, dem lokalen Ring des generischen Punktes η von C_4. Damit ist $\frac{X_1}{Z_1} = \frac{X_2}{Z_2}\pi$, $\frac{Y_1}{Z_1} = \frac{Y_2}{Z_2}\pi$ und

$$(Y_2 + \alpha X_2 + \gamma' Z_2)(Y_2 + \beta X_2 + \delta' Z_2) = \pi\frac{X_1}{Z_1}X_2^2.$$

Da ohne Einschränkung $Y_2 + \beta X_2 + \delta' Z_2$ auf C_4 nicht identisch verschwindet und also eine Einheit in $\mathcal{O}_{\mathcal{V}_1,\eta}$ ist, ist π Erzeugende des maximalen Ideals von $\mathcal{O}_{\mathcal{V}_1,\eta}$ und verschwindet zur Ordnung 1 auf C_4. Dies bedeutet, daß C_4 einfach ist. Ebenso ist C_5 einfach.

Also ist $\mathcal{V}_2$ regulär und als abgeschlossenes Unterschema von $\mathbf{P}^2_R \times_{Spec\,R} \mathbf{P}^2_R$ auch eigentlich über R. Die Komponenten C_1 bis C_5 sind über $\bar{k}$ isomorph zu $\mathbf{P}^1_{\bar{k}}$ und in einem

Fünfeck angeordnet. Deshalb hat man den Reduktionstyp I_5, es folgt, daß $\mathcal{V}_2$ minimal ist und $\mathcal{C} = \mathcal{V}_2$. Die Komponente C_1 ist über k definiert. Die Komponenten C_2 bis C_5 sind nur dann über k definiert, wenn $k' = k$ ist. Somit ist $m = 5$ und $c = 5$, falls $k' = k$ und $c = 1$, falls $k' \neq k$.

Aus $v(\Delta) \geq 6$ folgt $v(b_8) \geq 6$, da alle Summanden in Δ außer $b_2 b_8$ durch π^8 teilbar sind und $v(b_2) = 0$ ist. Daraus folgt wie eben $v(a_6) \geq 6$. Also hat man $F_2 \in \mathcal{M}^2$ und deshalb folgt wie in Abschnitt 5.4, daß X_2, Y_2, π mod $\mathcal{M}^2$ über $k = \mathcal{O}_{\mathcal{V}_2,P}/\mathcal{M}$ linear unabhängig sind und P singulär ist.

5.5.5 Aufblasen von $\mathcal{V}_2$ entlang $(\frac{X_1}{Z_1}, \frac{Y_1}{Z_1}, X_2, Y_2, \pi)$

Dazu betrachte man folgendes offene Unterschema von $\mathcal{V}_2$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}_2 - (\overline{\{(Z_1)\}} \cup \overline{\{(Z_2)\}}) &= \mathit{Spec}\ R[\frac{X_1}{Z_1}, \frac{Y_1}{Z_1}, \frac{X_2}{Z_2}, \frac{Y_2}{Z_2}]/\left(\frac{X_1}{Z_1} - \frac{X_2}{Z_2}\pi, \frac{Y_1}{Z_1} - \frac{Y_2}{Z_2}\pi, \frac{F_2}{Z_2^2}\right) \\
&\cong \mathit{Spec}\ R[\frac{X_2}{Z_2}, \frac{Y_2}{Z_2}]/\Big(\left(\frac{Y_2}{Z_2}\right)^2 + a_1 \frac{X_2}{Z_2}\frac{Y_2}{Z_2} + \pi a_{3,3}\frac{Y_2}{Z_2} - \\
&\qquad - \pi^2\left(\frac{X_2}{Z_2}\right)^3 - a_2\left(\frac{X_2}{Z_2}\right)^2 - \pi a_{4,3}\frac{X_2}{Z_2} - \pi^2 a_{6,6}\Big).
\end{aligned}$$

Diese Isomorphie ergibt sich vermöge des Ringmorphismus

$$R[\frac{X_1}{Z_1}, \frac{Y_1}{Z_1}, \frac{X_2}{Z_2}, \frac{Y_2}{Z_2}] \longrightarrow R[\frac{X_2}{Z_2}, \frac{Y_2}{Z_2}];$$

$$\frac{X_1}{Z_1} \mapsto \frac{X_2}{Z_2}\pi, \quad \frac{Y_1}{Z_1} \mapsto \frac{Y_2}{Z_2}\pi, \quad \frac{X_2}{Z_2} \mapsto \frac{X_2}{Z_2}, \quad \frac{Y_2}{Z_2} \mapsto \frac{Y_2}{Z_2}.$$

Und man betrachte das offene Unterschema von $\mathcal{V}_1$

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}_1 - \overline{\{(Z_1)\}} &= \mathit{Spec}\ R[\frac{X_1}{Z_1}, \frac{Y_1}{Z_1}]/\Big(\left(\frac{Y_1}{Z_1}\right)^2 + a_1\frac{X_1}{Z_1}\frac{Y_1}{Z_1} + \pi a_{3,2}\frac{Y_1}{Z_1} - \pi\left(\frac{X_1}{Z_1}\right)^3 - \\
&\qquad - a_2\left(\frac{X_1}{Z_1}\right)^2 - \pi a_{4,2}\frac{X_1}{Z_1} - \pi^2 a_{6,4}\Big).
\end{aligned}$$

Diese beiden Schemata sind durch fast dieselbe Gleichung gegeben. Nur $a_{3,2}$, $a_{4,2}$ und $a_{6,4}$ sind durch $a_{3,3}$, $a_{4,3}$ und $a_{6,6}$ zu ersetzen. Und die Potenz von π in $\pi\left(\frac{X_1}{Z_1}\right)^3$ erhöht sich um eins. Deshalb verlaufen alle weiteren Aufblasungen wie die in Abschnitt 5.5.3 beschriebene.

Da Δ unter allen dabei durchgeführten Translationen invariant ist und vor jeder weiteren Aufblasung durch ein zusätzliches π^2 teilbar sein muß, endet dieser Prozeß. Man erhält ein reguläres Schema $\mathcal{V}$, das als abgeschlossenes Unterschema eines Produkts von $\mathbf{P}_R^m$ auch eigentlich über R ist.

Da mit jeder zusätzliche Potenz von π, durch die Δ teilbar ist eine Komponente zu $\mathcal{V}_k$ hinzukommt, folgt mit $v(\Delta) = n$ induktiv, daß die spezielle Faser vom Typ I_n ist. Somit ist $\mathcal{V}$ minimal und $\mathcal{V} = \mathcal{C}$. Es gilt $n = m$.

Falls $k' = k$ ist, so sind alle Komponenten über k definiert und $c = n$.

Falls $k' \neq k$ und n gerade ist, so sind die Komponenten C_2, C_3 und C_4, C_5 und ... und C_{n-2}, C_{n-1} nicht über k definiert. Nur C_1 und C_n sind über k definiert und $c = 2$.

Falls $k' \neq k$ und n ungerade ist, so sind die Komponenten C_2, C_3 und C_4, C_5 und ... und C_{n-1}, C_n nicht über k definiert. Nur C_1 ist über k definiert und $c = 1$.

Die restliche Behauptung von Schritt 2 folgt nun aus Satz 2.29.

5.6 Beweis von Schritt 4

Am Ende von Abschnitt 5.4 haben wir das Schema $\mathcal{V}_1 = Proj\ \ R[X_1, Y_1, Z_1]/(F_1)$, mit

$$F_1 \;=\; Y_1^2 Z_1 + a_1 X_1 Y_1 Z_1 + a_{3,1} Y_1 Z_1^2 - \pi X_1^3 - a_2 X_1^2 Z_1 - a_{4,1} X_1 Z_1^2 - a_{6,2} Z_1^3$$

erhalten.

In der Untersuchung von $\mathcal{V}_1$ ist noch der Fall $\pi \,|\, b_2$ zu behandeln. Also sei von jetzt an $\pi \,|\, b_2 \;=\; a_1^2 + 4a_2$. b_2 ist die Diskriminante von $Y_1^2 + a_1 X_1 Y_1 - a_2 X_1^2$. Dies bedeutet, daß $Y_1^2 + a_1 X_1 Y_1 - a_2 X_1^2$ eine doppelte Nullstelle in $\bar{k}$ hat. Da k perfekt ist, liegt diese bereits in k. Das heißt es gibt ein $s \in R$ mit:

$$Y_1^2 + a_1 X_1 Y_1 - a_2 X_1^2 \;\equiv\; (Y_1 - sX_1)^2 \mod \pi$$

Die Translation $X_1 \to X_1,\ Y_1 \to Y_1 + sX_1,\ Z_1 \to Z_1$ führt zu $\pi \,|\, a_1,\, a_2$. Sie bewirkt auf E/K die Translation $X \to X,\ Y \to Y + sX,\ Z \to Z$. Nach Satz 2.28 werden deshalb unsere Annahmen $\pi \,|\, a_3,\, a_4$ und $\pi^2 \,|\, a_6$ nicht zerstört.

In Schritt 4 ist somit $\pi \,|\, a_1, a_2, a_3, a_4,\ \ \pi^2 \,|\, a_6,\ \ \pi^2 \nmid a_4$.

Die bisherige Aufblasung von $\mathcal{W}$ in Abschnitt 5.4 lieferte als Ergebnis das Schema

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_1 &= Proj\ \ R[X_1, Y_1, Z_1]/(F_1), \qquad \text{mit} \\ F_1 &= Y_1^2 Z_1 + \pi a_{1,1} X_1 Y_1 Z_1 + a_{3,1} Y_1 Z_1^2 - \pi X_1^3 - \pi a_{2,1} X_1^2 Z_1 - a_{4,1} X_1 Z_1^2 - a_{6,2} Z_1^3. \end{aligned}$$

$\mathcal{V}_1$ hat die beiden Komponenten

$$C_1 \;=\; Proj\ \ k[X_1, Y_1, Z_1]/(Z_1) \qquad \text{und} \qquad C_2 \;=\; Proj\ \ k[X_1, Y_1, Z_1]/(G_1),$$

wobei $G_1 \;=\; Y_1^2 + a_{3,1} Y_1 Z_1 - a_{6,2} Z_1^2 - a_{4,1} X_1 Z_1$ ist.

<u>Auf $\mathcal{V}_1 - C_2$</u> liegen keine singulären Punkte, da $\mathcal{V}_1 - C_2 \cong \mathcal{W}^0$ und $\mathcal{W}^0$ regulär ist.

<u>Sei $P = C_1 \cap C_2$</u>
und $\mathcal{M}$ das maximale Ideal in $\mathcal{O}_{\mathcal{V}_1, P}$. Dann ist $\mathcal{M} = (Y_1, Z_1, \pi)$ und $X_1 \notin \mathcal{M}$. Damit ist

$$\pi \;=\; \frac{1}{X_1^3}(Y_1^2 Z_1 + \pi a_{1,1} X_1 Y_1 Z_1 + a_{3,1} Y_1 Z_1^2 - \pi a_{2,1} X_1^2 Z_1 - a_{4,1} X_1 Z_1^2 - a_{6,2} Z_1^3)$$

und also $\mathcal{M} = (Y_1, Z_1)$, das heißt P ist regulär.

Auf $C_2 - C_1$ liegen keine singulären Punkte, da C_2 ein regulärer Kegelschnitt, also über $\bar{k}$ isomorph zu $\mathbf{P}^1_{\bar{k}}$ ist. Nach Satz 2.21 ist somit C_2 auch als Teilmenge von $\mathcal{V}_1$ regulär.

Wie in Abschnitt 5.5 sieht man, daß die Komponente C_1 Vielfachheit eins hat.

Die Komponente C_2 hat ebenfalls Vielfachheit eins, denn $Z_1 G_1 \equiv \pi X_1^3 \mod \pi$. Da Z_1 auf C_2 nicht identisch verschwindet, ist es eine Einheit in dem lokalen Ring $\mathcal{O}_{\mathcal{V}_1,\eta}$ des generischen Punktes η von C_2. Deshalb ist π Erzeugende des maximalen Ideals von $\mathcal{O}_{\mathcal{V}_1,\eta}$ und verschwindet zur Ordnung 1 auf C_2. Dies bedeutet, daß C_2 einfach ist.

Also ist $\mathcal{V}_1$ regulär und als abgeschlossenes Unterschema von $\mathbf{P}^2_R$ auch eigentlich über R. Da sich C_1 und C_2 in einem einzigen Punkt tangential schneiden hat man den Reduktionstyp III, es folgt, daß $\mathcal{V}_1$ minimal ist und $\mathcal{C} = \mathcal{V}_1$. Es ist $m = 2$ und $c = 2$.

5.7 Beweis von Schritt 5

Gegenüber Schritt 4 in Abschnitt 5.6 ändert sich hier nur $\pi^2 \mid a_4$ und $\pi^3 \nmid b_6$. Das bedeutet, daß $G_1 \equiv Y_1^2 + a_{3,1} Y_1 Z_1 - a_{6,2} Z_1^2 \mod \pi$ ist. $\tilde{b}_{6,2}$ ist die Diskriminante von $\widetilde{G}_1$ und $\pi^3 \nmid b_6$ heißt, daß C_2 über $\bar{k}$ in die zwei verschiedenen Komponenten

$$C_2: \; Y_1 - \alpha Z_1 = \pi = 0 \qquad \text{und} \qquad C_3: \; Y_1 - \beta Z_1 = \pi = 0$$

zerfällt. C_1, C_2 und C_3 schneiden sich alle drei transversal in dem einen Punkt (Y_1, Z_1, π).

Auf $\mathcal{V}_1 - C_2$ liegen keine singulären Punkte, da $\mathcal{V}_1 - C_2 \cong \mathcal{W}^0$ und $\mathcal{W}^0$ regulär ist.

Der Punkt $C_1 \cap C_2 \cap C_3$ ist aus gleichem Grund wie in Abschnitt 5.6 regulär.

Sei $P \in (C_2 \cup C_3) - C_1$
dann ist $\mathcal{M} = (g(Y_1, Z_1), p(X_1, Y_1, Z_1), \pi)$, wobei $G_1 \equiv g(Y_1, Z_1) \cdot h \mod (p, \pi)$ in $R[X_1, Y_1, Z_1]$ ist, da $G_1 \in \mathcal{M}$ ist. Wegen $P \notin C_1$ ist $Z_1 \notin \mathcal{M}$. Außerdem ist $h \notin \mathcal{M}$, da sonst wegen $\alpha \neq \beta$ auch $Z_1 \in \mathcal{M}$ wäre. Also ist

$$g \equiv \frac{1}{h Z_1} \pi X_1^3 \mod (p, \pi)$$

und damit $\mathcal{M} = (p, \pi)$. Somit ist P regulär.

Wie in Abschnitt 5.5 sieht man, daß die Komponente C_1 Vielfachheit eins hat.

Die Komponenten C_2 und C_3 haben ebenfalls Vielfachheit eins, denn es ist

$$Z_1 (Y_1 - \alpha Z_1)(Y_1 - \beta Z_1) \equiv \pi X_1^3 \mod \pi.$$

Da Z_1 und $Y_1 - \beta Z_1$ auf C_2 nicht identisch verschwindet, sind sie Einheiten in dem lokalen Ring $\mathcal{O}_{\mathcal{V}_1,\eta}$ des generischen Punktes η von C_2. Deshalb ist π Erzeugende des maximalen Ideals von $\mathcal{O}_{\mathcal{V}_1,\eta}$ und verschwindet zur Ordnung 1 auf C_2. Dies bedeutet, daß C_2 einfach ist. Ebenso ist C_3 einfach.

Also ist $\mathcal{V}_1$ regulär und als abgeschlossenes Unterschema von $\mathbf{P}^2_R$ auch eigentlich über R. Man hat den Reduktionstyp IV. Deshalb ist $\mathcal{V}_1$ minimal und es folgt $\mathcal{C} = \mathcal{V}_1$. Es ist $m = 3$. Falls $k' = k$, so sind alle drei Komponenten über k definiert und $c = 3$. Falls $k' \neq k$, so ist nur die Komponente C_1 über k definiert und $c = 1$.

5.8 Beweis von Schritt 6

Sei nun $\pi^3 \,|\, b_6$. Das bedeutet, daß $Y_1^2 + a_{3,1}Y_1Z_1 - a_{6,2}Z_1^2$ eine doppelte Nullstelle in $\bar{k}$ hat. Da k perfekt ist liegt diese in k und es gibt ein $t \in R$ mit:

$$Y_1^2 + a_{3,1}Y_1Z_1 - a_{6,2}Z_1^2 \;\equiv\; (Y_1 - tZ_1)^2 \mod \pi.$$

Die Translation $X_1 \to X_1,\; Y_1 \to Y_1 + tZ_1,\; Z_1 \to Z_1$ führt dann zu $\pi \,|\, a_{3,1},\, a_{6,2}$. Sie bewirkt auf E/K die Translation $X \to X,\; Y \to Y + t\pi Z,\; Z \to Z$.

Nach Satz 2.28 ist somit $\pi \,|\, a_1,\, a_2,\;\; \pi^2 \,|\, a_3,\, a_4,\;\; \pi^3 \,|\, a_6$ und

$$F_1 \;=\; Y_1^2Z_1 + \pi a_{1,1}X_1Y_1Z_1 + \pi a_{3,2}Y_1Z_1^2 - \pi X_1^3 - \pi a_{2,1}X_1^2Z_1 - \pi a_{4,2}X_1Z_1^2 - \pi a_{6,3}Z_1^3.$$

$\widetilde{\mathcal{V}}_1$ besteht aus den Geraden $C_1 : Z_1 = 0$ mit Vielfachheit eins und $C_2 : Y_1 = 0$ mit Vielfachheit zwei.

5.8.1 Die singulären Punkte von $\mathcal{V}_1$

Auf $\mathcal{V}_1 - C_2$ liegen keine singulären Punkte, da $\mathcal{V}_1 - C_2 \cong \mathcal{W}^0$ und $\mathcal{W}^0$ regulär ist.

Der Punkt $C_1 \cap C_2$ ist aus gleichem Grund wie in Abschnitt 5.6 nicht singulär.

Auf C_2 liegen singuläre Punkte
auf $\overline{\{(Y_1,\, X_1^3 - a_{2,1}X_1^2Z_1 - a_{4,2}X_1Z_1^2 - a_{6,3}Z_1^3,\, \pi)\}}$, da dort $F_1 \in \mathcal{M}^2$ ist (Vergleiche Abschnitt 5.4).

Also wird als nächstes die doppelte Gerade $C_2 : Y_1 = \pi = 0$ aufgeblasen.

5.8.2 Aufblasen von $\mathcal{V}_1$ entlang $(Y_1,\, \pi)$

$$\mathcal{I} \;=\; (Y_1,\, \pi), \qquad \mathcal{S} \;=\; \bigoplus_{d\geq 0} \mathcal{I}^d$$

Über den affinen, offenen Mengen ergibt sich:

$Y_1 \neq 0$: $\quad U_{Y_1} \;=\; Spec\;\, R\,[\frac{X_1}{Y_1}, \frac{Z_1}{Y_1}]$

Man hat die surjektive Abbildung $R\,[\frac{X_1}{Y_1}, \frac{Z_1}{Y_1}][Y_2'', Z_2''] \to \mathcal{S}(U_{Y_1})$ durch die Zuordnung $(Y_2'', Z_2'') \mapsto (1, \pi)$.

Ihr Kern ist $I_{Y_1} = (Z_2'' - Y_2''\pi)$.

Also ergibt sich $\mathcal{S}(U_{Y_1}) \cong R\,[\frac{X_1}{Y_1}, \frac{Z_1}{Y_1}][Y_2'']$ und damit $Proj\;\; \mathcal{S}(U_{Y_1}) \cong Spec\;\; R\,[\frac{X_1}{Y_1}, \frac{Z_1}{Y_1}]$.

$\phi_{Y_1} : Proj\;\; \mathcal{S}(U_{Y_1}) \to U_{Y_1}$ ist gegeben durch $R\,[\frac{X_1}{Y_1}, \frac{Z_1}{Y_1}] \to \mathcal{S}(U_{Y_1})$.

$\underline{X_1 \neq 0:}$ $\quad U_{X_1} \;=\; Spec\ R\,[\frac{Y_1}{X_1}, \frac{Z_1}{X_1}]$

Man hat die surjektive Abbildung $R\,[\frac{Y_1}{X_1}, \frac{Z_1}{X_1}][Y_2', Z_2'] \to \mathcal{S}(U_{X_1})$ durch die Zuordnung $(Y_2', Z_2') \mapsto (\frac{Y_1}{X_1}, \pi)$.

Ihr Kern ist $I_{X_1} = (Y_2'\pi - Z_2'\frac{Y_1}{X_1})$.

Also ergibt sich $\mathcal{S}(U_{X_1}) \cong R\,[\frac{Y_1}{X_1}, \frac{Z_1}{X_1}][Y_2', Z_2']/I_{X_1}$.

$\phi_{X_1} : Proj\ \ \mathcal{S}(U_{X_1}) \to U_{X_1}$ ist gegeben durch $R\,[\frac{Y_1}{X_1}, \frac{Z_1}{X_1}] \to \mathcal{S}(U_{X_1})$.

$\underline{Z_1 \neq 0:}$ $\quad U_{Z_1} \;=\; Spec\ R\,[\frac{X_1}{Z_1}, \frac{Y_1}{Z_1}]$

Man hat die surjektive Abbildung $R\,[\frac{X_1}{Z_1}, \frac{Y_1}{Z_1}][Y_2, Z_2] \to \mathcal{S}(U_{Z_1})$ durch die Zuordnung $(Y_2, Z_2) \mapsto (\frac{Y_1}{Z_1}, \pi)$.

Ihr Kern ist $I_{Z_1} = (Y_2\pi - Z_2\frac{Y_1}{Z_1})$.

Also ergibt sich $\mathcal{S}(U_{Z_1}) \cong R\,[\frac{X_1}{Z_1}, \frac{Y_1}{Z_1}][Y_2, Z_2]/I_{Z_1}$.

$\phi_{Z_1} : Proj\ \ \mathcal{S}(U_{Z_1}) \to U_{Z_1}$ ist gegeben durch $R\,[\frac{X_1}{Z_1}, \frac{Y_1}{Z_1}] \to \mathcal{S}(U_{Z_1})$.

Über $X_1 \neq 0, Z_1 \neq 0$ werden $Proj\ \ \mathcal{S}(U_{X_1})$ und $Proj\ \ \mathcal{S}(U_{Z_1})$ zusammengeklebt durch

$$(Y_2', Z_2') \;=\; (\frac{Z_1}{X_1}Y_2, Z_2) \qquad \text{beziehungsweise} \qquad (\frac{X_1}{Z_1}Y_2', Z_2') \;=\; (Y_2, Z_2).$$

Dadurch erhält man $\mathbf{Proj}\ \mathcal{S}$ als Unterschema von $\mathbf{P}_R^2\ \times_{Spec\,R}\ \mathbf{P}_R^1$ und den Morphismus $\phi : \mathbf{Proj}\ \mathcal{S} \longrightarrow \mathbf{P}_R^2$.

Die strikte Transformation von $\mathcal{V}_1$ erhält man gemäß Satz 2.32 als den Abschluß

$\mathcal{V}_2 \;:=\; \overline{\phi^{-1}(\mathcal{V}_1 - \overline{\{(Y_1, \pi)\}})}$ in $\mathbf{Proj}\ \mathcal{S}$.

Über dem affinen Teil $X_1 \neq 0$ von $\mathcal{V}_1$ liegen dabei folgende Teile von $\mathcal{V}_2$:

In $Y_2' \neq 0:$ $\quad \Rightarrow \quad \pi \;=\; \dfrac{Z_2'}{Y_2'}\dfrac{Y_1}{X_1}.$ Damit ist

$$\begin{aligned} Y_2' \cdot \frac{F_1}{X_1^3} \;&=\; \frac{Y_1}{X_1}\left(\frac{Y_1}{X_1}\frac{Z_1}{X_1}Y_2' + \pi a_{1,1}\frac{Z_1}{X_1}Y_2' + \pi a_{3,2}\left(\frac{Z_1}{X_1}\right)^2 Y_2' - Z_2' - \right. \\ &\qquad \left. - a_{2,1}\frac{Z_1}{X_1}Z_2' - a_{4,2}\left(\frac{Z_1}{X_1}\right)^2 Z_2' - a_{6,3}\left(\frac{Z_1}{X_1}\right)^3 Z_2'\right) \;=\; 0. \end{aligned}$$

Falls $\frac{Y_1}{X_1} = 0$, so folgt $\pi = 0$ und der Punkt ist $\notin \phi^{-1}(\mathcal{V}_1 - \overline{\{(Y_1, \pi)\}})$.

Also bleibt nur

$$\begin{aligned} F_2' \;:=\; &\frac{Y_1}{X_1}\frac{Z_1}{X_1}Y_2' + \pi a_{1,1}\frac{Z_1}{X_1}Y_2' + \pi a_{3,2}\left(\frac{Z_1}{X_1}\right)^2 Y_2' - \\ &- Z_2' - a_{2,1}\frac{Z_1}{X_1}Z_2' - a_{4,2}\left(\frac{Z_1}{X_1}\right)^2 Z_2' - a_{6,3}\left(\frac{Z_1}{X_1}\right)^3 Z_2' \;=\; 0. \end{aligned}$$

In $Z_2' \neq 0:$ $\quad \Rightarrow \quad \dfrac{Y_1}{X_1} = \dfrac{Y_2'}{Z_2'}\pi.$ Damit ist

$$\begin{aligned} Z_2' \cdot \frac{F_1}{X_1^3} &= \pi \left(\frac{Y_1}{X_1}\frac{Z_1}{X_1}Y_2' + \pi a_{1,1}\frac{Z_1}{X_1}Y_2' + \pi a_{3,2}\left(\frac{Z_1}{X_1}\right)^2 Y_2' - Z_2' - \right. \\ &\left. - a_{2,1}\frac{Z_1}{X_1}Z_2' - a_{4,2}\left(\frac{Z_1}{X_1}\right)^2 Z_2' - a_{6,3}\left(\frac{Z_1}{X_1}\right)^3 Z_2' \right) \;=\; 0. \end{aligned}$$

Falls $\pi = 0$, so folgt $\frac{Y_1}{X_1} = 0$ und der Punkt ist $\notin \phi^{-1}(\mathcal{V}_1 - \overline{\{(Y_1,\pi)\}})$.
Also bleibt nur $F_2' = 0$.

Und über dem affinen Teil $Z_1 \neq 0$ von $\mathcal{V}_1$ liegen folgende Teile von $\mathcal{V}_2$:

In $Y_2 \neq 0:$ $\quad \Rightarrow \quad \pi = \dfrac{Z_2}{Y_2}\dfrac{Y_1}{Z_1}.$ Damit ist

$$\begin{aligned} Y_2 \cdot \frac{F_1}{Z_1^3} &= \frac{Y_1}{Z_1}\left(\frac{Y_1}{Z_1}Y_2 + \pi a_{1,1}\frac{X_1}{Z_1}Y_2 + \pi a_{3,2}Y_2 - \left(\frac{X_1}{Z_1}\right)^3 Z_2 - \right. \\ &\left. - a_{2,1}\left(\frac{X_1}{Z_1}\right)^2 Z_2 - a_{4,2}\frac{X_1}{Z_1}Z_2 - a_{6,3}Z_2 \right) \;=\; 0. \end{aligned}$$

Falls $\frac{Y_1}{Z_1} = 0$, so folgt $\pi = 0$ und der Punkt ist $\notin \phi^{-1}(\mathcal{V}_1 - \overline{\{(Y_1,\pi)\}})$.
Also bleibt nur

$$\begin{aligned} F_2 &:= \frac{Y_1}{Z_1}Y_2 + \pi a_{1,1}\frac{X_1}{Z_1}Y_2 + \pi a_{3,2}Y_2 - \\ &- \left(\frac{X_1}{Z_1}\right)^3 Z_2 - a_{2,1}\left(\frac{X_1}{Z_1}\right)^2 Z_2 - a_{4,2}\frac{X_1}{Z_1}Z_2 - a_{6,3}Z_2 \;=\; 0. \end{aligned}$$

In $Z_2 \neq 0:$ $\quad \Rightarrow \quad \dfrac{Y_1}{Z_1} = \dfrac{Y_2}{Z_2}\pi.$ Damit ist

$$\begin{aligned} Z_2 \cdot \frac{F_1}{Z_1^3} &= \pi\left(\frac{Y_1}{Z_1}Y_2 + \pi a_{1,1}\frac{X_1}{Z_1}Y_2 + \pi a_{3,2}Y_2 - \left(\frac{X_1}{Z_1}\right)^3 Z_2 - \right. \\ &\left. - a_{2,1}\left(\frac{X_1}{Z_1}\right)^2 Z_2 - a_{4,2}\frac{X_1}{Z_1}Z_2 - a_{6,3}Z_2 \right) \;=\; 0. \end{aligned}$$

Falls $\pi = 0$, so folgt $\frac{Y_1}{Z_1} = 0$ und der Punkt ist $\notin \phi^{-1}(\mathcal{V}_1 - \overline{\{(Y_1,\pi)\}})$.
Also bleibt nur $F_2 = 0$.

Man bekommt also $\mathcal{V}_2:$ durch das Ideal (F_2') in *Proj* $\mathcal{S}(U_{X_1})$ und
durch das Ideal (F_2) in *Proj* $\mathcal{S}(U_{Z_1})$.

$\widetilde{\mathcal{V}}_2$ besteht aus folgenden Komponenten:

- $\underline{Z_1 = 0} \;\Rightarrow\; X_1 \neq 0$ und wegen $F_2' = 0 \Rightarrow \underline{Z_2' = 0}$ oder
  $\Rightarrow\; Y_1 \neq 0 \Rightarrow \underline{Z_2'' = 0}.$

  Dies ist die Komponente C_1 von $\mathcal{V}_1$, die in $R[X_1, Y_1, Z_1]$ liegt. Sie ist ein $\mathbf{P}^1_k$ mit dem Parameter $\frac{X_1}{Y_1}$ beziehungsweise $\frac{Y_1}{X_1}$.

  Sei jetzt $Z_1 \neq 0$. Aus $\pi = 0$ folgt dann $Z_2 \frac{Y_1}{Z_1} = 0$. Sei zuerst

- $\underline{Z_2 = 0} \Rightarrow Y_2 \neq 0$ und wegen $F_2 = 0 \Rightarrow \underline{\frac{Y_1}{Z_1} = 0}$. Dies ist die Komponente C_2 von $\mathcal{V}_1$. Der Parameter ist $\frac{X_1}{Z_1}$. Nun fehlt noch

- $\underline{\frac{Y_1}{Z_1} = 0} \Rightarrow \left(\frac{X_1}{Z_1}\right)^3 Z_2 + a_{2,1}\left(\frac{X_1}{Z_1}\right)^2 Z_2 + a_{4,2}\frac{X_1}{Z_1} Z_2 + a_{6,3} Z_2 = 0$. Da wir die Komponente $C_2 : \frac{Y_1}{Z_1} = Z_2 = 0$ schon haben, bleibt noch $\underline{\left(\frac{X_1}{Z_1}\right)^3 + a_{2,1}\left(\frac{X_1}{Z_1}\right)^2 + a_{4,2}\frac{X_1}{Z_1} + a_{6,3} = 0}$. Diese Komponente ist bei der Aufblasung neu hinzugekommen, sie heiße C_3. Ihr Parameter ist $\frac{Y_2}{Z_2}$ beziehungsweise $\frac{Z_2}{Y_2}$.

Die Komponente C_1 hat dabei Vielfachheit eins. Denn $\pi Y_2' = Z_2' \frac{Y_1}{X_1}$ und da $Y_2' \neq 0$ und $\frac{Y_1}{X_1}$ auf C_1 nicht identisch verschwindet, ist $\pi \sim Z_2'$ in dem lokalen Ring $\mathcal{O}_{\mathcal{V}_2,\eta}$ des generischen Punktes η von C_1. Aus $F_2' = 0$ folgt

$$\frac{Z_1}{X_1}\left(\frac{Y_1}{X_1}Y_2' + \pi a_{1,1}Y_2' + \pi a_{3,2}\frac{Z_1}{X_1}Y_2' - a_{2,1}Z_2' - a_{4,2}\frac{Z_1}{X_1}Z_2' - a_{6,3}\left(\frac{Z_1}{X_1}\right)^2 Z_2'\right) \quad = \quad Z_2'.$$

Der Term in Klammern verschwindet nicht identisch auf C_1 und ist somit eine Einheit in $\mathcal{O}_{\mathcal{V}_2,\eta}$. Deshalb ist π Erzeugende des maximalen Ideals von $\mathcal{O}_{\mathcal{V}_2,\eta}$ und verschwindet zur Ordnung 1 auf C_1. Dies bedeutet, daß C_1 einfach ist.

Die Komponente C_2 ist doppelt. Denn $\pi = \frac{Z_2}{Y_2}\frac{Y_1}{Z_1}$ und F_2 ergibt nach $\frac{Y_1}{Z_1}$ aufgelöst

$$\frac{Y_1}{Z_1} \quad = \quad \frac{Z_2}{Y_2}\left(-a_{1,1}\frac{X_1}{Z_1}\frac{Y_1}{Z_1} - a_{3,2}\frac{Y_1}{Z_1} + \left(\frac{X_1}{Z_1}\right)^3 + a_{2,1}\left(\frac{X_1}{Z_1}\right)^2 + a_{4,2}\frac{X_1}{Z_1} + a_{6,3}\right).$$

Der Term in Klammern verschwindet nicht identisch auf C_2 und ist somit eine Einheit in dem lokalen Ring $\mathcal{O}_{\mathcal{V}_2,\eta}$ des generischen Punktes η von C_2. Deshalb sind $\frac{Z_2}{Y_2}$ und $\frac{Y_1}{Z_1}$ beides Erzeugende des maximalen Ideals von $\mathcal{O}_{\mathcal{V}_2,\eta}$ und sie verschwinden zur Ordnung 1 auf C_2. Somit ist die Ordnung von π auf C_2 gleich 2. Dies bedeutet, daß C_2 doppelt ist.

5.8.3 Die singulären Punkte von $\mathcal{V}_2$

Da $\mathbf{P}^2_R \times_{Spec\,R} \mathbf{P}^1_R$ ein reguläres vierdimensionales Schema ist, wird das maximale Ideal des lokalen Ringes eines jeden abgeschlossenen Punktes von vier Elementen erzeugt. Somit werden auch auf dem Unterschema $\mathcal{V}_2$ höchstens vier Elemente zum Erzeugen des maximalen Ideals eines abgeschlossenen Punktes benötigt.

Sei nun $P \in \widetilde{\mathcal{V}}_2$ ein abgeschlossener Punkt und $\mathcal{M}$ das maximale Ideal in $\mathcal{O}_{\mathcal{V}_2,P}$.

$\underline{\text{Auf } \mathcal{V}_2 - (C_2 \cup C_3)}$ liegen keine singulären Punkte, da $\mathcal{V}_2 - (C_2 \cup C_3) \cong \mathcal{V}_1 - C_2 \cong \mathcal{W}^0$ und somit regulär ist.

$P = C_1 \cap C_2$:
dann ist $X_1 \neq 0$ und $\mathcal{M} = (\frac{Y_1}{X_1}, \frac{Z_1}{X_1}, Z_2', \pi)$. Somit ist $Y_2' \notin \mathcal{M}$ und es gilt $\pi = \frac{Z_2'}{Y_2'}\frac{Y_1}{X_1}$ und

$$Z_2' = \frac{Z_1}{X_1}\left(\frac{Y_1}{X_1}Y_2' + \pi a_{1,1}Y_2' + \pi a_{3,2}\frac{Z_1}{X_1}Y_2' - a_{2,1}Z_2 - a_{4,2}\frac{Z_1}{X_1}Z_2 - a_{6,3}\left(\frac{Z_1}{X_1}\right)^2 Z_2\right).$$

Das bedeutet $\mathcal{M} = (\frac{Y_1}{X_1}, \frac{Z_1}{X_1})$ und P ist regulär.

$P \in C_2 - C_1$:
dann ist $Z_1 \neq 0$ und $\mathcal{M} = (\frac{Y_1}{Z_1}, Z_2, p\left(\frac{X_1}{Z_1}, \frac{Y_1}{Z_1}, Y_2, Z_2\right), \pi)$. Somit ist $Y_2 \notin \mathcal{M}$ und es gilt $\pi = \frac{Z_2}{Y_2}\frac{Y_1}{Z_1}$ und

$$\frac{Y_1}{Z_1} = -\pi\left(a_{1,1}\frac{X_1}{Z_1} + a_{3,2}\right) + \frac{Z_2}{Y_2}\left(\left(\frac{X_1}{Z_1}\right)^3 + a_{2,1}\left(\frac{X_1}{Z_1}\right)^2 + a_{4,2}\frac{X_1}{Z_1} + a_{6,3}\right).$$

Das bedeutet $\mathcal{M} = (Z_2, p)$ und P ist regulär.

Insgesammt ergibt sich also, daß $C_1 \cup C_2$ regulär ist.

5.8.4 Untersuchung von C_3:

Die Struktur der Komponente C_3 hängt von der Art der Nullstellen des Polynoms $G_2 := \left(\frac{X_1}{Z_1}\right)^3 + a_{2,1}\left(\frac{X_1}{Z_1}\right)^2 + a_{4,2}\frac{X_1}{Z_1} + a_{6,3}$ in $\bar{k}$ ab.

In Schritt 6 hat dieses nun zunächst drei verschiedene Nullstellen in $\bar{k}$. Das heißt, daß C_3 über $\bar{k}$ in drei Geraden zerfällt:

$$C_3: \frac{Y_1}{Z_1} = \frac{X_1}{Z_1} + \alpha = 0, \quad C_4: \frac{Y_1}{Z_1} = \frac{X_1}{Z_1} + \beta = 0 \quad \text{und} \quad C_5: \frac{Y_1}{Z_1} = \frac{X_1}{Z_1} + \gamma = 0.$$

$P \in (C_3 \cup C_4 \cup C_5) - C_2$:
dann ist $Z_1 \neq 0, Z_2 \neq 0$ und $\mathcal{M} = (\frac{Y_1}{Z_1}, g\left(\frac{X_1}{Z_1}\right), p(Y_2, Z_2), \pi)$, wobei $G_2 \equiv g\left(\frac{X_1}{Z_1}\right) \cdot h \bmod \pi$ in $R[\frac{X_1}{Z_1}]$ ist. Es ist $h \notin \mathcal{M}$. Denn sonst wäre auch der größte gemeinsame Teiler von g und $h \bmod \pi$ in $\mathcal{M}$, da $k[\frac{X_1}{Z_1}]$ Hauptidealring ist. Dieser ist aber 1. Also gilt

$$\frac{Y_1}{Z_1} = \frac{Y_2}{Z_2}\pi \qquad \text{und} \qquad g \equiv \frac{1}{hZ_2}\left(\frac{Y_1}{Z_1}Y_2 + \pi\left(a_{1,1}\frac{X_1}{Z_1}Y_2 + a_{3,2}Y_2\right)\right) \mod \pi.$$

Das bedeutet $\mathcal{M} = (p, \pi)$ und P ist regulär.

Die Komponenten C_3, C_4 und C_5 haben dabei Vielfachheit eins. Denn $\pi Y_2 = \frac{Y_1}{Z_1}Z_2$ und da Y_2 und Z_2 auf C_3 nicht identisch verschwinden, gilt $\pi \sim \frac{Y_1}{Z_1}$ in dem lokalen Ring $\mathcal{O}_{\mathcal{V}_2,\eta}$ des generischen Punktes η von C_3. Aus $F_2 = 0$ folgt

$$(\frac{X_1}{Z_1} + \alpha)(\frac{X_1}{Z_1} + \beta)(\frac{X_1}{Z_1} + \gamma)Z_2 = \frac{Y_1}{Z_1}Y_2 + \pi a_{1,1}\frac{X_1}{Z_1}Y_2 + \pi a_{3,2}Y_2.$$

Die Terme $(\frac{X_1}{Z_1}+\beta)(\frac{X_1}{Z_1}+\gamma)Z_2$ verschwindet nicht identisch auf C_3 und sind somit Einheiten in $\mathcal{O}_{\mathcal{V}_2,\eta}$. Deshalb ist π Erzeugende des maximalen Ideals von $\mathcal{O}_{\mathcal{V}_2,\eta}$ und verschwindet zur Ordnung 1 auf C_3. Dies bedeutet, daß C_3 einfach ist. Ebenso sind C_4 und C_5 einfach.

Also ist $\mathcal{V}_2$ regulär und als abgeschlossenes Unterschema von $\mathbf{P}^2_R \times_{Spec\,R} \mathbf{P}^1_R$ auch eigentlich über R. Die spezielle Faser von $\mathcal{V}_2$ besteht aus der doppelten Komponente C_2 und den vier einfachen Komponenten C_1, C_3, C_4 und C_5, die C_2 transversal schneiden. Also hat man den Reduktionstyp I_0^*, es folgt, daß $\mathcal{V}_2$ minimal ist und $\mathcal{C} = \mathcal{V}_2$. Es ist $m = 5$. Die Komponente C_1 ist über k definiert und die Komponenten C_3, C_4 und C_5 gehören zu den Nullstellen von G_2. Also ist c, die Anzahl der über k definierten Komponenten um eins größer, als die Anzahl der Nullstellen von G_2 in k.

5.9 Beweis von Schritt 7

In Schritt 7 hat das Polynom G_2 aus Abschnitt 5.8.4 eine doppelte und eine einfache Nullstelle in $\bar{k}$. Da k perfekt ist, liegt die doppelte Nullstelle in k und besitzt einen Repräsentanten $r \in R$. Sie wird durch die Translation $X_1 \to X_1+rZ_1,\ Y_1 \to Y_1,\ Z_1 \to Z_1$ auf $\frac{X_1}{Z_1} = 0$ verschoben. Also kann man ohne Einschränkung annehmen, daß $\pi \,|\, a_{4,2}$, $a_{6,3}$ und $\pi \nmid a_{2,1}$. Die Translation bewirkt auf E/K den Übergang $X \to X + r\pi Z,\ Y \to Y,\ Z \to Z$.

Nach Satz 2.28 wird damit $\pi \,|\, a_1, a_2,\ \pi \nmid a_{2,1},\ \pi^2 \,|\, a_3,\ \pi^3 \,|\, a_4,\ \pi^4 \,|\, a_6$ und

$$F_2 = \frac{Y_1}{Z_1}Y_2 + \pi a_{1,1}\frac{X_1}{Z_1}Y_2 + \pi a_{3,2}Y_2 - \left(\frac{X_1}{Z_1}\right)^3 Z_2 - a_{2,1}\left(\frac{X_1}{Z_1}\right)^2 Z_2 - \pi a_{4,3}\frac{X_1}{Z_1}Z_2 - \pi a_{6,4}Z_2.$$

Ferner ist $G_2 \equiv \left(\frac{X_1}{Z_1}\right)^2\left(\frac{X_1}{Z_1} + a_{2,1}\right) \bmod \pi$. Also zerfällt C_3 über k in die Komponenten

$$C_3:\ \frac{X_1}{Z_1} + a_{2,1} = \frac{Y_1}{Z_1} = \pi = 0 \qquad \text{und} \qquad C_4:\ \frac{X_1}{Z_1} = \frac{Y_1}{Z_1} = \pi = 0.$$

Wie in Abschnitt 5.8.2 gezeigt, hat die Komponente C_1 Vielfachheit eins und die Komponente C_2 Vielfachheit zwei.

Die Komponente C_3 ist einfach. Denn $\pi Y_2 = Z_2\frac{Y_1}{Z_1}$ und da Z_2 und Y_2 auf C_3 nicht identisch verschwinden, ist $\pi \sim \frac{Y_1}{Z_1}$ in dem lokalen Ring $\mathcal{O}_{\mathcal{V}_2,\eta}$ des generischen Punktes η von C_3. Aus $F_2 = 0$ folgt

$$\frac{Y_1}{Z_1}\left(\frac{Y_2}{Z_2} + a_{1,1}\frac{X_1}{Z_1} + a_{3,2} - a_{4,3}\frac{X_1}{Z_1}\frac{Z_2}{Y_2} - a_{6,4}\frac{Z_2}{Y_2}\right) \quad = \quad \left(\frac{X_1}{Z_1}\right)^2\left(\frac{X_1}{Z_1} + a_{2,1}\right).$$

Die Klammer auf der linken Seite und der Term $\left(\frac{X_1}{Z_1}\right)^2$ auf der rechten Seite der Gleichung verschwinden nicht identisch auf C_3 und sind somit Einheiten in $\mathcal{O}_{\mathcal{V}_2,\eta}$. Somit ist π Erzeugende des maximalen Ideals von $\mathcal{O}_{\mathcal{V}_2,\eta}$ und verschwindet zur Ordnung 1 auf C_3. Dies bedeutet, daß C_3 einfach ist.

Da C_1 und C_3 einfache Komponenten sind und C_2 eine doppelte Komponente ist, sollen die Namen von C_2 und C_3 vertauscht werden. Es ist dann

$$C_2:\ \frac{X_1}{Z_1} + a_{2,1} = \frac{Y_1}{Z_1} = \pi = 0 \qquad \text{und} \qquad C_3:\ \frac{Y_1}{Z_1} = Z_2 = \pi = 0.$$

5.9.1 Die singulären Punkte von $\mathcal{V}_2$

Da $\mathbf{P}^2_R \times_{Spec\,R} \mathbf{P}^1_R$ ein reguläres vierdimensionales Schema ist, wird das maximale Ideal des lokalen Ringes eines jeden abgeschlossenen Punktes von vier Elementen erzeugt. Somit werden auch auf dem Unterschema $\mathcal{V}_2$ höchstens vier Elemente zum Erzeugen des maximalen Ideals eines abgeschlossenen Punktes benötigt.

Sei nun $P \in \widetilde{\mathcal{V}}_2$ ein abgeschlossener Punkt und $\mathcal{M}$ das maximale Ideal in $\mathcal{O}_{\mathcal{V}_2,P}$.

$\underline{C_1 \cup C_3}$ ist regulär, wie wir in Abschnitt 5.8.3 gesehen hatten.

$\underline{P \in C_2 - C_3}$:
dann ist $Z_2 \neq 0$ und $\mathcal{M} = (\frac{Y_1}{Z_1},\, \frac{X_1}{Z_1} + a_{2,1},\, p(Y_2,Z_2),\, \pi)$. Somit ist $\frac{X_1}{Z_1} \notin \mathcal{M}$ und es gilt $\frac{Y_1}{Z_1} = \frac{Y_2}{Z_2}\pi$ und

$$\frac{X_1}{Z_1} + a_{2,1} = \frac{1}{\left(\frac{X_1}{Z_1}\right)^2}\left(\frac{Y_1}{Z_1}\frac{Y_2}{Z_2} + \pi\left(a_{1,1}\frac{X_1}{Z_1}\frac{Y_2}{Z_2} + a_{3,2}\frac{Y_2}{Z_2} - a_{4,3}\frac{X_1}{Z_1} - a_{6,4}\right)\right).$$

Das bedeutet $\mathcal{M} = (\pi, p)$ und P ist regulär.

$\underline{\text{Auf } C_4 \text{ liegen singuläre Punkte}}$
in $Z_2 \neq 0$ auf $\overline{\{(\frac{X_1}{Z_1}, \frac{Y_1}{Z_1}, Y_2^2 + a_{3,2}Y_2Z_2 - a_{6,4}Z_2^2, \pi)\}}$, da dort wegen $Z_2\frac{Y_1}{Z_1} = Y_2\pi$ gilt $Z_2F_2 \in \mathcal{M}^2$ (Vergleiche Abschnitt 5.4).

Also wird als nächstes die doppelte Gerade $C_4 : \frac{X_1}{Z_1} = \frac{Y_1}{Z_1} = \pi = 0$ aufgeblasen.

Dazu betrachte man das offene Unterschema von $\mathcal{V}_2$

$$C_4 \subset \mathcal{V}_2 - \overline{\{(Z_1)\}} = Proj\ \ R\,[\frac{X_1}{Z_1}, \frac{Y_1}{Z_1}][Y_2, Z_2]/\left(Y_2\pi - Z_2\frac{Y_1}{Z_1}, F_2\right).$$

Da aber im Laufe des weiteren Vorgehens diese Aufblasung in leicht veränderter Form noch mehrmals vorkommen wird, werden wir nicht dieses Schema aufblasen, sondern das folgende

$$\mathcal{V}^*_{2\nu-2} \;:=\; Proj\ \ R\,[\frac{X_1}{Z_1}, \frac{Y_1}{Z_1}][Y_2, Z_2]/\left(Y_2\pi - Z_2\frac{Y_1}{Z_1},\ F^*_{2\nu-2}\left(\frac{X_1}{Z_1}, \frac{Y_1}{Z_1}, Y_2, Z_2\right)\right),$$

$$\text{wobei}\quad F^*_{2\nu-2}\left(\frac{X_1}{Z_1}, \frac{Y_1}{Z_1}, Y_2, Z_2\right) := \frac{Y_1}{Z_1}Y_2 + \pi a_{1,1}\frac{X_1}{Z_1}Y_2 + \pi a_{3,\nu}Y_2 - \\ - \pi^{\nu-2}\left(\frac{X_1}{Z_1}\right)^3 Z_2 - a_{2,1}\left(\frac{X_1}{Z_1}\right)^2 Z_2 - \pi a_{4,\nu+1}\frac{X_1}{Z_1}Z_2 - \pi a_{6,2\nu}Z_2.$$

Man beachte dabei, daß für $\nu = 2$ genau $\mathcal{V}_2 - \overline{\{(Z_1)\}} \cong \mathcal{V}^*_2$ ist.

5.9.2 Aufblasen von $\mathcal{V}^*_{2\nu-2}$ entlang $(\frac{X_1}{Z_1}, \frac{Y_1}{Z_1}, \pi)$

$$\mathcal{I} = (\frac{X_1}{Z_1}, \frac{Y_1}{Z_1}, \pi), \qquad \mathcal{S} = \bigoplus_{d \geq 0} \mathcal{I}^d$$

Über den affinen, offenen Mengen ergibt sich:

$\underline{Y_2 \neq 0:}$ $\quad U_{Y_2} = Spec \;\; R\,[\frac{X_1}{Z_1}, \frac{Y_1}{Z_1}, \frac{Z_2}{Y_2}]$

Man hat die surjektive Abbildung $R\,[\frac{X_1}{Z_1}, \frac{Y_1}{Z_1}, \frac{Z_2}{Y_2}][X_3', Y_3', Z_3'] \rightarrow \mathcal{S}(U_{Y_2})$ durch die Zuordnung $(X_3', Y_3', Z_3') \mapsto (\frac{X_1}{Z_1}, \frac{Y_1}{Z_1}, \pi)$.

Ihr Kern ist $I_{Y_2} = (Y_3' \frac{X_1}{Z_1} - X_3' \frac{Y_1}{Z_1},\, Z_3' \frac{X_1}{Z_1} - X_3'\pi,\, Z_3' \frac{Y_1}{Z_1} - Y_3'\pi)$.

Also ergibt sich $\mathcal{S}(U_{Y_2}) \cong R\,[\frac{X_1}{Z_1}, \frac{Y_1}{Z_1}, \frac{Z_2}{Y_2}][X_3', Y_3', Z_3']/I_{Y_2}$.

$\phi_{Y_2} : Proj \;\; \mathcal{S}(U_{Y_2}) \rightarrow U_{Y_2}$ ist gegeben durch $R\,[\frac{X_1}{Z_1}, \frac{Y_1}{Z_1}, \frac{Z_2}{Y_2}] \rightarrow \mathcal{S}(U_{Y_2})$.

$\underline{Z_2 \neq 0:}$ $\quad U_{Z_2} = Spec \;\; R\,[\frac{X_1}{Z_1}, \frac{Y_1}{Z_1}, \frac{Y_2}{Z_2}]$

Man hat die surjektive Abbildung $R\,[\frac{X_1}{Z_1}, \frac{Y_1}{Z_1}, \frac{Y_2}{Z_2}][X_3, Y_3, Z_3] \rightarrow \mathcal{S}(U_{Z_2})$ durch die Zuordnung $(X_3, Y_3, Z_3) \mapsto (\frac{X_1}{Z_1}, \frac{Y_1}{Z_1}, \pi)$.

Ihr Kern ist $I_{Z_2} = (Y_3 \frac{X_1}{Z_1} - X_3 \frac{Y_1}{Z_1},\, Z_3 \frac{X_1}{Z_1} - X_3\pi,\, Z_3 \frac{Y_1}{Z_1} - Y_3\pi)$.

Also ergibt sich $\mathcal{S}(U_{Z_2}) \cong R\,[\frac{X_1}{Z_1}, \frac{Y_1}{Z_1}, \frac{Y_2}{Z_2}][X_3, Y_3, Z_3]/I_{Z_2}$.

$\phi_{Z_2} : Proj \;\; \mathcal{S}(U_{Z_2}) \rightarrow U_{Z_2}$ ist gegeben durch $R\,[\frac{X_1}{Z_1}, \frac{Y_1}{Z_1}, \frac{Y_2}{Z_2}] \rightarrow \mathcal{S}(U_{Z_2})$.

Über $Y_2 \neq 0, Z_2 \neq 0$ werden $Proj \;\; \mathcal{S}(U_{Y_2})$ und $Proj \;\; \mathcal{S}(U_{Z_2})$ zusammengeklebt durch

$$(X_3', Y_3', Z_3') \;\; = \;\; (X_3, Y_3, Z_3).$$

Dadurch erhält man $\mathbf{Proj}\ \mathcal{S}$ als das zum Ideal I_{Z_2} gehörende Unterschema von $Spec \;\; R\,[\frac{X_1}{Z_1}, \frac{Y_1}{Z_1}] \;\times_R\; Proj \;\; R\,[Y_2, Z_2] \;\times_R\; Proj \;\; R\,[X_3, Y_3, Z_3] \;=\; \mathbf{A}^2_R \times_R \mathbf{P}^1_R \times_R \mathbf{P}^2_R$ und den Morphismus $\phi : \mathbf{Proj}\ \mathcal{S} \longrightarrow \mathbf{A}^2_R \times_{Spec\, R} \mathbf{P}^1_R$.

Die strikte Transformation von $\mathcal{V}^*_{2\nu-2}$ erhält man gemäß Satz 2.32 als den Abschluß

$\mathcal{V}_{2\nu-1} := \overline{\phi^{-1}(\mathcal{V}^*_{2\nu-2} - \overline{\{(\frac{X_1}{Z_1}, \frac{Y_1}{Z_1}, \pi)\}})}$ in $\mathbf{Proj}\ \mathcal{S}$.

Dabei ist $\mathcal{V}_{2\nu-1}$ durch folgende Gleichungen gegeben:

In $X_3 \neq 0:$ $\quad \Rightarrow \quad \frac{Y_1}{Z_1} = \frac{Y_3}{X_3}\frac{X_1}{Z_1}$ und $\pi = \frac{Z_3}{X_3}\frac{X_1}{Z_1}$

Damit ist $X_3 \cdot (Y_2\pi - Z_2\frac{Y_1}{Z_1}) = \frac{X_1}{Z_1}(Y_2Z_3 - Z_2Y_3) = 0$ und

$$\begin{aligned} X_3 \cdot F^*_{2\nu-2} \;\; &= \;\; \frac{X_1}{Z_1}\Bigg(Y_2Y_3 + a_{1,1}\frac{X_1}{Z_1}Y_2Z_3 + a_{3,\nu}Y_2Z_3 - \pi^{\nu-2}\left(\frac{X_1}{Z_1}\right)^2 Z_2X_3 - \\ &\qquad - a_{2,1}\frac{X_1}{Z_1}Z_2X_3 - a_{4,\nu+1}\frac{X_1}{Z_1}Z_2Z_3 - a_{6,2\nu}Z_2Z_3 \Bigg) = 0. \end{aligned}$$

Falls $\frac{X_1}{Z_1} = 0$, so folgt $\frac{Y_1}{Z_1} = \pi = 0$ und der Punkt gehört nicht zu der Menge $\phi^{-1}(\mathcal{V}^*_{2\nu-2} - \overline{\{(\frac{X_1}{Z_1}, \frac{Y_1}{Z_1}, \pi)\}})$.

Also bleibt nur $Y_2Z_3 - Z_2Y_3 = 0$ und

$$\begin{aligned} F^*_{2\nu-1} \;\; &:= \;\; Y_2Y_3 + a_{1,1}\frac{X_1}{Z_1}Y_2Z_3 + a_{3,\nu}Y_2Z_3 - \pi^{\nu-2}\left(\frac{X_1}{Z_1}\right)^2 Z_2X_3 - \\ &\qquad - a_{2,1}\frac{X_1}{Z_1}Z_2X_3 - a_{4,\nu+1}\frac{X_1}{Z_1}Z_2Z_3 - a_{6,2\nu}Z_2Z_3 = 0. \end{aligned}$$

In $Y_3 \neq 0:\quad \Rightarrow\quad \frac{X_1}{Z_1} = \frac{X_3}{Y_3}\frac{Y_1}{Z_1}$ und $\pi = \frac{Z_3}{Y_3}\frac{Y_1}{Z_1}$

Damit ist $Y_3 \cdot (Y_2\pi - Z_2\frac{Y_1}{Z_1}) = \frac{Y_1}{Z_1}(Y_2Z_3 - Z_2Y_3) = 0$ und

$$\begin{aligned} Y_3 \cdot F^*_{2\nu-2} &= \frac{Y_1}{Z_1}\left(Y_2Y_3 + a_{1,1}\frac{X_1}{Z_1}Y_2Z_3 + a_{3,\nu}Y_2Z_3 - \pi^{\nu-2}\left(\frac{X_1}{Z_1}\right)^2 Z_2X_3 - \right.\\ &\quad \left. - a_{2,1}\frac{X_1}{Z_1}Z_2X_3 - a_{4,\nu+1}\frac{X_1}{Z_1}Z_2Z_3 - a_{6,2\nu}Z_2Z_3\right) = 0. \end{aligned}$$

Falls $\frac{Y_1}{Z_1} = 0$, so folgt $\frac{X_1}{Z_1} = \pi = 0$ und der Punkt gehört nicht zu der Menge $\overline{\phi^{-1}(\mathcal{V}^*_{2\nu-2} - \{(\frac{X_1}{Z_1}, \frac{Y_1}{Z_1}, \pi)\})}$.

Also bleibt nur $Y_2Z_3 - Z_2Y_3 = F^*_{2\nu-1} = 0$.

In $Z_3 \neq 0:\quad \Rightarrow\quad \frac{X_1}{Z_1} = \frac{X_3}{Z_3}\pi$ und $\frac{Y_1}{Z_1} = \frac{Y_3}{Z_3}\pi$

Damit ist $Z_3 \cdot (Y_2\pi - Z_2\frac{Y_1}{Z_1}) = \pi(Y_2Z_3 - Z_2Y_3) = 0$ und

$$\begin{aligned} Z_3 \cdot F^*_{2\nu-2} &= \pi\left(Y_2Y_3 + a_{1,1}\frac{X_1}{Z_1}Y_2Z_3 + a_{3,\nu}Y_2Z_3 - \pi^{\nu-2}\left(\frac{X_1}{Z_1}\right)^2 Z_2X_3 - \right.\\ &\quad \left. - a_{2,1}\frac{X_1}{Z_1}Z_2X_3 - a_{4,\nu+1}\frac{X_1}{Z_1}Z_2Z_3 - a_{6,2\nu}Z_2Z_3\right) = 0. \end{aligned}$$

Falls $\pi = 0$, so folgt $\frac{X_1}{Z_1} = \frac{Y_1}{Z_1} = 0$ und der Punkt gehört nicht zu der Menge $\overline{\phi^{-1}(\mathcal{V}^*_{2\nu-2} - \{(\frac{X_1}{Z_1}, \frac{Y_1}{Z_1}, \pi)\})}$.

Also bleibt nur $Y_2Z_3 - Z_2Y_3 = F^*_{2\nu-1} = 0$.

Man bekommt also $\mathcal{V}_{2\nu-1}$ durch das Ideal $(Y_2Z_3 - Z_2Y_3, F^*_{2\nu-1})$ in **Proj** $\mathcal{S}$.

$\widetilde{\mathcal{V}}_{2\nu-1}$ besteht aus folgenden Komponenten:

$\pi = 0 \Rightarrow Z_3\frac{X_1}{Z_1} = Z_3\frac{Y_1}{Z_1} = 0$

- $\underline{Z_3 = 0} \Rightarrow Z_2Y_3 = 0$. Sei zunächst $\underline{Z_2 = 0} \Rightarrow Y_2 \neq 0$ und wegen $F^*_{2\nu-1} = 0 \Rightarrow \underline{Y_3 = 0} \Rightarrow X_3 \neq 0 \Rightarrow \underline{\frac{Y_1}{Z_1} = 0}$. Dies ist die Komponente $C_{2\nu-1}$ von $\mathcal{V}^*_{2\nu-2}$ mit dem Parameter $\frac{X_1}{Z_1}$. Bei $\nu = 2$ ist dies die Komponente C_3 von $\mathcal{V}_2$.
- $\underline{Z_3 = 0} \Rightarrow Z_2Y_3 = 0$. Es bleibt noch $\underline{Y_3 = 0} \Rightarrow X_3 \neq 0 \Rightarrow \underline{\frac{Y_1}{Z_1} = 0}$ und wegen $F^*_{2\nu-1} = 0 \Rightarrow \left(\pi^{\nu-2}\frac{X_1}{Z_1} + a_{2,1}\right)\frac{X_1}{Z_1}Z_2 = 0$. Den Fall $Z_2 = 0$ haben wir soeben als Komponente $C_{2\nu-1}$ schon behandelt. Also bleiben
  * $\underline{\frac{X_1}{Z_1} = 0}$. Dies ist die Komponente $C_{2\nu}$ von $\mathcal{V}^*_{2\nu-2}$ mit dem Parameter $\frac{Y_2}{Z_2}$ beziehungsweise $\frac{Z_2}{Y_2}$. Bei $\nu = 2$ ist dies die Komponente C_4 von $\mathcal{V}_2$.
  * $\underline{\pi^{\nu-2}\frac{X_1}{Z_1} + a_{2,1} = 0}$. Bei $\nu = 2$ ist dies die Komponente C_2 von $\mathcal{V}_2$ mit dem Parameter $\frac{Y_2}{Z_2}$ beziehungsweise $\frac{Z_2}{Y_2}$. Bei $\nu > 2$ tritt diese Komponente nicht auf, da $\tilde{a}_{2,1} \neq 0$ in k ist.

- $\underline{\frac{X_1}{Z_1} = \frac{Y_1}{Z_1} = 0} \Rightarrow Y_2Z_3 - Z_2Y_3 = 0$ und $Y_2Y_3 + a_{3,\nu}Y_2Z_3 - a_{6,2\nu}Z_2Z_3 = 0$. Falls $Z_2 = 0$, so folgt $Y_2 \neq 0$ und deshalb $Y_3 = Z_3 = 0$. Dies ist keine Komponente, sondern der Schnittpunkt der beiden Komponenten $C_{2\nu-1}$ und $C_{2\nu}$. Also sei jetzt $Z_2 \neq 0$. Dann folgt

$$Z_2 \cdot (Y_2Y_3 + a_{3,\nu}Y_2Z_3 - a_{6,2\nu}Z_2Z_3) = Z_3(Y_2^2 + a_{3,\nu}Y_2Z_2 - a_{6,2\nu}Z_2^2) = 0.$$

  Aus $Z_3 = 0$ folgt $Y_3 = 0$ wegen $Z_2 \neq 0$. Dieser Fall wurde soeben als Komponente $C_{2\nu}$ schon behandelt. Somit bleibt nur $\underline{\left(\frac{Y_2}{Z_2}\right)^2 + a_{3,\nu}\frac{Y_2}{Z_2} - a_{6,2\nu} = \frac{Y_2}{Z_2}Z_3 - Y_3 = 0}$. Diese Komponente ist bei der Aufblasung neu hinzugekommen, sie heiße $C_{2\nu+1}$. Ihr Parameter ist $\frac{X_3}{Z_3}$ beziehungsweise $\frac{Z_3}{X_3}$.

$\underline{\text{Die Komponente } C_{2\nu-1}}$ ist dabei doppelt, da sie nicht in dem aufgeblasenen Unterschema $\left(\frac{X_1}{Z_1}, \frac{Y_1}{Z_1}, \pi\right)$ von $\mathcal{V}^*_{2\nu-2}$ lag.

Die Komponente $C_{2\nu}$ ist auch doppelt. Denn $\pi = \frac{Z_3}{X_3}\frac{X_1}{Z_1}$ und da Z_2 auf $C_{2\nu}$ nicht identisch verschwindet, gilt $Y_3 = Z_3\frac{Y_2}{Z_2}$ im lokalen Ring $\mathcal{O}_{\mathcal{V}_{2\nu-1},\eta}$ des generischen Punktes η von $C_{2\nu}$. In $F^*_{2\nu-1}$ eingesetzt, ergibt dies

$$\frac{X_1}{Z_1}\left(\pi^{\nu-2}\frac{X_1}{Z_1}X_3 + a_{2,1}X_3\right) \;=\; Z_3\left(\left(\frac{Y_2}{Z_2}\right)^2 + a_{1,1}\frac{X_1}{Z_1}\frac{Y_2}{Z_2} + a_{3,\nu}\frac{Y_2}{Z_2} - a_{4,\nu+1}\frac{X_1}{Z_1} - a_{6,2\nu}\right).$$

Die Terme in Klammern auf beiden Seiten der Gleichung verschwinden nicht identisch auf $C_{2\nu}$ und sind somit Einheiten in $\mathcal{O}_{\mathcal{V}_{2\nu-1},\eta}$. Außerdem ist $\frac{Y_1}{Z_1} = \frac{Y_3}{X_3}\frac{X_1}{Z_1}$. Deshalb sind Z_3 und $\frac{X_1}{Z_1}$ beides Erzeugende des maximalen Ideals von $\mathcal{O}_{\mathcal{V}_{2\nu-1},\eta}$ und sie verschwinden zur Ordnung 1 auf $C_{2\nu}$. Somit ist die Ordnung von π auf $C_{2\nu}$ gleich 2. Dies bedeutet, daß $C_{2\nu}$ doppelt ist.

5.9.3 Die singulären Punkte von $\mathcal{V}_{2\nu-1}$

Da $\mathbf{A}^2_R \times_{Spec\,R} \mathbf{P}^1_R \times_{Spec\,R} \mathbf{P}^2_R$ ein reguläres sechsdimensionales Schema ist, wird das maximale Ideal des lokalen Ringes eines jeden abgeschlossenen Punktes von sechs Elementen erzeugt. Somit werden auch auf dem Unterschema $\mathcal{V}_{2\nu-1}$ höchstens sechs Elemente zum Erzeugen des maximalen Ideals eines abgeschlossenen Punktes benötigt.

Sei nun $P \in \widetilde{\mathcal{V}}_{2\nu-1}$ ein abgeschlossener Punkt und $\mathcal{M}$ das maximale Ideal in $\mathcal{O}_{\mathcal{V}_{2\nu-1},P}$.

$\underline{\text{Auf } \mathcal{V}_{2\nu-1} - (C_{2\nu} \cup C_{2\nu+1})}$ liegen keine singulären Punkte,
da $\mathcal{V}_{2\nu-1} - (C_{2\nu} \cup C_{2\nu+1}) \cong \mathcal{V}^*_{2\nu-2} - C_{2\nu}$ und somit regulär ist. Bei $\nu = 2$ steht hier, daß $\mathcal{V}_2 - C_4$ regulär ist, was wir am Beginn von Abschnitt 5.9 herausgefunden hatten.

$\underline{P = C_{2\nu-1} \cap C_{2\nu}}$:
dann ist $Y_2 \neq 0$, $X_3 \neq 0$ und $\mathcal{M} = \left(\frac{X_1}{Z_1}, \frac{Y_1}{Z_1}, \frac{Z_2}{Y_2}, \frac{Z_3}{X_3}, \frac{Y_3}{X_3}, \pi\right)$. Es ist $\pi = \frac{X_1}{Z_1}\frac{Z_3}{X_3}$, $\frac{Y_1}{Z_1} = \frac{X_1}{Z_1}\frac{Y_3}{X_3}$, $\frac{Z_3}{X_3} = \frac{Y_3}{X_3}\frac{Z_2}{Y_2}$ und

$$\begin{aligned}\frac{Y_3}{X_3} \;&=\; \frac{X_1}{Z_1}\left(-a_{1,1}\frac{Z_3}{X_3} + \pi^{\nu-2}\frac{X_1}{Z_1}\frac{Z_2}{Y_2} + a_{2,1}\frac{Z_2}{Y_2} + a_{4,\nu+1}\frac{Z_2}{Y_2}\frac{Z_3}{X_3}\right) + \\ &\quad + \frac{Z_3}{X_3}\left(-a_{3,\nu} + a_{6,2\nu}\frac{Z_2}{Y_2}\right).\end{aligned}$$

Das bedeutet $\mathcal{M} = (\frac{X_1}{Z_1}, \frac{Z_2}{Y_2})$ und P ist regulär.

$P \in C_{2\nu} - C_{2\nu-1}$:
dann ist $Z_2 \neq 0$ und $\mathcal{M} = (\frac{X_1}{Z_1}, \frac{Y_1}{Z_1}, Y_3, Z_3, p(Y_2, Z_2), \pi)$. Somit sind $\pi^{\nu-2}\frac{X_1}{Z_1} + a_{2,1}$ und $X_3 \notin \mathcal{M}$. Es gilt $\pi = \frac{X_1}{Z_1}\frac{Z_3}{X_3}$, $\frac{Y_1}{Z_1} = \frac{X_1}{Z_1}\frac{Y_3}{X_3}$, $Y_3 = Z_3\frac{Y_2}{Z_2}$ und

$$\frac{X_1}{Z_1} = \frac{1}{(\pi^{\nu-2}\frac{X_1}{Z_1} + a_{2,1})X_3}\left(Y_3\frac{Y_2}{Z_2} + Z_3\left(a_{1,1}\frac{X_1}{Z_1}\frac{Y_2}{Z_2} + a_{3,\nu}\frac{Y_2}{Z_2} - a_{4,\nu+1}\frac{X_1}{Z_1} - a_{6,2\nu}\right)\right).$$

Das bedeutet $\mathcal{M} = (Z_3, p)$ und P ist regulär.

5.9.4 Untersuchung von $C_{2\nu+1}$

Die Struktur der Komponente $C_{2\nu+1}$ hängt von der Art der Nullstellen des Polynoms $G_{2\nu-1} := \left(\frac{Y_2}{Z_2}\right)^2 + a_{3,\nu}\frac{Y_2}{Z_2} - a_{6,2\nu}$ in $\bar{k}$ ab.

Habe nun zunächst $G_{2\nu-1}$ zwei verschiedene Nullstellen in $\bar{k}$. Also zerfällt $C_{2\nu+1}$ über $\bar{k}$ in zwei Komponenten. Diese sollen mit $C_{2\nu+1}$ und $C_{2\nu+2}$ bezeichnet werden.

$P \in (C_{2\nu+1} \cup C_{2\nu+2}) - C_{2\nu}$:
dann ist $Z_2 \neq 0$ und $\mathcal{M} = (\frac{X_1}{Z_1}, \frac{Y_1}{Z_1}, g(\frac{Y_2}{Z_2}), \frac{Y_2}{Z_2}Z_3 - Y_3, p(X_3, Y_3, Z_3), \pi)$, wobei $G_{2\nu-1} \equiv g(\frac{Y_2}{Z_2}) \cdot h \bmod \pi$ in $R[\frac{Y_2}{Z_2}]$ ist. Es ist $Z_3 \notin \mathcal{M}$, da sonst auch $Y_3 \in \mathcal{M}$ und damit $P \in C_{2\nu}$ wäre. Außerdem ist $h \notin \mathcal{M}$, da sonst wegen der Verschiedenheit der beiden Nullstellen von $G_{2\nu-1}$ auch $1 \in \mathcal{M}$ wäre. Also gilt $\frac{X_1}{Z_1} = \frac{X_3}{Z_3}\pi$, $\frac{Y_1}{Z_1} = \frac{Y_3}{Z_3}\pi$ und

$$g \equiv \frac{1}{h}\frac{X_1}{Z_1}\left(-a_{1,1}\frac{Y_2}{Z_2} + \pi^{\nu-2}\frac{X_1}{Z_1}\frac{X_3}{Z_3} + a_{2,1}\frac{X_3}{Z_3} + a_{4,\nu+1}\right) \mod \pi.$$

Da auf $\mathcal{V}_{2\nu-1}$ ohnehin $\frac{Y_2}{Z_2}Z_3 - Y_3$ gilt, bedeutet das $\mathcal{M} = (p, \pi)$ und P ist regulär.

Die Komponenten $C_{2\nu+1}$ und $C_{2\nu+2}$ haben Vielfachheit eins. Denn analog zu der vorangegangenen Folgerung $\mathcal{M} = (p, \pi)$ zeigt man, daß das maximale Ideal des lokalen Ringes $\mathcal{O}_{\mathcal{V}_{2\nu-1},\eta}$ des generischen Punktes η von $C_{2\nu+1}$ von π erzeugt wird. Dies bedeutet, daß π auf $C_{2\nu+1}$ mit Ordnung 1 verschwindet und $C_{2\nu+1}$ einfach ist. Ebenso ist $C_{2\nu+2}$ einfach.

Also ist $\mathcal{V}_{2\nu-1}$ regulär und als abgeschlossenes Unterschema eines Produkts von $\mathbf{P}_R^m$ auch eigentlich über R. Die spezielle Faser von $\mathcal{V}_{2\nu-1}$ besteht aus den vier einfachen Komponenten C_1, C_2, $C_{2\nu+1}$ und $C_{2\nu+2}$ und den doppelten Komponenten $C_3, \ldots, C_{2\nu}$. Also hat man den Reduktionstyp I_n^* mit $n = 2\nu - 3$, es folgt, daß $\mathcal{V}_{2\nu-1}$ minimal ist und $\mathcal{C}$ ergibt sich durch Zusammenkleben von $\mathcal{V}_{2\nu-1}$ mit all den Teilen, die bis hierher weggeschnitten wurden. Es ist $m = 2\nu + 2 = n + 5$ und $c = 4$, falls die Nullstellen von $G_{2\nu}$ in k liegen und $c = 2$, falls sie nicht in k liegen. Die weitere Auswertung wird in Abschnitt 5.9.8 durchgeführt.

Habe nun $G_{2\nu-1}$ eine doppelte Nullstelle in $\bar{k}$. Da k perfekt ist, liegt diese in k und wird durch die Translation $Y_2 \to Y_2 + tZ_2$, $Z_2 \to Z_2$ auf $\frac{Y_2}{Z_2} = 0$ verschoben. Da auf E/K gilt $\frac{Y_2}{Z_2} = \frac{Y}{\pi^\nu Z}$, bewirkt diese auf E/K die Translation $X \to X$, $Y \to Y + t\pi^\nu Z$, $Z \to Z$. Also kann man ohne Einschränkung annehmen, daß $\pi \mid a_{3,\nu}, a_{6,2\nu}$.

Nach Satz 2.28 wird $\pi \mid a_1,\, a_2,\;\; \pi^{\nu+1} \mid a_3,\, a_4,\;\; \pi^{2\nu+1} \mid a_6$ und

$$\begin{aligned} F^*_{2\nu-1} \;&=\; Y_2Y_3 + a_{1,1}\frac{X_1}{Z_1}Y_2Z_3 + \pi a_{3,\nu+1}Y_2Z_3 - \pi^{\nu-2}\left(\frac{X_1}{Z_1}\right)^2 Z_2X_3 - \\ &\quad - a_{2,1}\frac{X_1}{Z_1}Z_2X_3 - a_{4,\nu+1}\frac{X_1}{Z_1}Z_2Z_3 - \pi a_{6,2\nu+1}Z_2Z_3. \end{aligned}$$

Auf $\underline{C_{2\nu+1}}$ liegen singuläre Punkte in $Z_2 \neq 0, Z_3 \neq 0$ auf $\overline{\{(\frac{X_1}{Z_1}, \frac{Y_1}{Z_1}, \frac{Y_2}{Z_2},\, Y_3,\, a_{2,1}X_3^2 + a_{4,\nu+1}X_3Z_3 + \pi a_{6,2\nu+1}Z_3^2,\, \pi)\}}$, da dort wegen $Z_3\frac{X_1}{Z_1} = X_3\pi$ gilt $Z_3F^*_{2\nu-1} \in \mathcal{M}^2$ (Vergleiche Abschnitt 5.4).

Also wird als nächstes die doppelte Gerade $C_{2\nu+1} : \frac{X_1}{Z_1} = \frac{Y_1}{Z_1} = \frac{Y_2}{Z_2} = Y_3 = \pi = 0$ aufgeblasen.

Dazu betrachte man das offene Unterschema von $\mathcal{V}_{2\nu-1}$

$$C_{2\nu+1} \subset \mathcal{V}_{2\nu-1} - \overline{\{(Z_2)\}} = Proj\;\; R[\frac{X_1}{Z_1}, \frac{Y_1}{Z_1}, \frac{Y_2}{Z_2}][X_3, Y_3, Z_3]/I, \text{ wobei}$$

$$I = \left(Y_3\frac{X_1}{Z_1} - X_3\frac{Y_1}{Z_1},\, Z_3\frac{X_1}{Z_1} - X_3\pi,\, Z_3\frac{Y_1}{Z_1} - Y_3\pi,\, Y_3Z_2 - Z_3Y_2,\, F^*_{2\nu-1}\right).$$

Dort gilt $\underline{Y_3 = Z_3\frac{Y_2}{Z_2}}$. Daraus folgt $Z_3\left(\frac{Y_1}{Z_1} - \pi\frac{Y_2}{Z_2}\right) = 0$ und $X_3\frac{Y_1}{Z_1} = Y_3\frac{X_1}{Z_1} = \frac{X_1}{Z_1}Z_3\frac{Y_2}{Z_2} = X_3\pi\frac{Y_2}{Z_2}$. Da aus $Z_3 = 0$ folgt $Y_3 = 0$ und damit $X_3 \neq 0$ erhält man $\underline{\frac{Y_1}{Z_1} = \pi\frac{Y_2}{Z_2}}$. Damit wird $Y_3\frac{X_1}{Z_1} - X_3\frac{Y_1}{Z_1} = \frac{Y_2}{Z_2}(Z_3\frac{X_1}{Z_1} - X_3\pi)$, $\;Z_3\frac{Y_1}{Z_1} - Y_3\pi = \pi\frac{Y_2}{Z_2}Z_3 - \pi\frac{Y_2}{Z_2}Z_3 = 0$ und

$$\begin{aligned} \frac{1}{Z_2}F^*_{2\nu-1} \;&=\; \left(\frac{Y_2}{Z_2}\right)^2 Z_3 + a_{1,1}\frac{X_1}{Z_1}\frac{Y_2}{Z_2}Z_3 + \pi a_{3,\nu+1}\frac{Y_2}{Z_2}Z_3 - \\ &\quad - \pi^{\nu-2}\left(\frac{X_1}{Z_1}\right)^2 X_3 - a_{2,1}\frac{X_1}{Z_1}X_3 - a_{4,\nu+1}\frac{X_1}{Z_1}Z_3 - \pi a_{6,2\nu+1}Z_3. \end{aligned}$$

Also ist

$$\mathcal{V}_{2\nu-1} - \overline{\{(Z_2)\}} \;\cong\; Proj\;\; R[\frac{X_1}{Z_1}, \frac{Y_2}{Z_2}][X_3, Z_3]/(Z_3\frac{X_1}{Z_1} - X_3\pi,\, \frac{1}{Z_2}F^*_{2\nu-1}) \;\;=:\;\; \mathcal{V}^*_{2\nu-1}.$$

Die über $Z_2 \neq 0$ liegenden Komponenten von $\widetilde{\mathcal{V}}_{2\nu-1}$ sind:

$$C_{2\nu} : \;\frac{X_1}{Z_1} = Z_3 = \pi = 0, \qquad C_{2\nu+1} : \;\frac{X_1}{Z_1} = \frac{Y_2}{Z_2} = \pi = 0$$

$$\text{und bei } \nu = 2 \text{ noch} \quad C_2 : \;\frac{X_1}{Z_1} + a_{2,1} = Z_3 = \pi = 0.$$

5.9.5 Aufblasen von $\mathcal{V}^*_{2\nu-1}$ entlang $(\frac{X_1}{Z_1}, \frac{Y_2}{Z_2}, \pi)$

$$\mathcal{I} = (\frac{X_1}{Z_1}, \frac{Y_2}{Z_2}, \pi), \qquad \mathcal{S} = \bigoplus_{d \geq 0} \mathcal{I}^d$$

Über den affinen, offenen Mengen ergibt sich:

$\underline{X_3 \neq 0:}$ $\quad U_{X_3} = Spec\ R[\frac{X_1}{Z_1}, \frac{Y_2}{Z_2}, \frac{Z_3}{X_3}]$

Man hat die surjektive Abbildung $R[\frac{X_1}{Z_1}, \frac{Y_2}{Z_2}, \frac{Z_3}{X_3}][X_4', Y_4', Z_4'] \to \mathcal{S}(U_{X_3})$ durch die Zuordnung $(X_4', Y_4', Z_4') \mapsto (\frac{X_1}{Z_1}, \frac{Y_2}{Z_2}, \pi)$.

Ihr Kern ist $I_{X_3} = (Y_4'\frac{X_1}{Z_1} - X_4'\frac{Y_2}{Z_2},\ Z_4'\frac{X_1}{Z_1} - X_4'\pi,\ Z_4'\frac{Y_2}{Z_2} - Y_4'\pi)$.

Also ergibt sich $\mathcal{S}(U_{X_3}) \cong R[\frac{X_1}{Z_1}, \frac{Y_2}{Z_2}, \frac{Z_3}{X_3}][X_4', Y_4', Z_4']/I_{X_3}$.

$\phi_{X_3} : Proj\ \mathcal{S}(U_{X_3}) \to U_{X_3}$ ist gegeben durch $R[\frac{X_1}{Z_1}, \frac{Y_2}{Z_2}, \frac{Z_3}{X_3}] \to \mathcal{S}(U_{X_3})$.

$\underline{Z_3 \neq 0:}$ $\quad U_{Z_3} = Spec\ R[\frac{X_1}{Z_1}, \frac{Y_2}{Z_2}, \frac{X_3}{Z_3}]$

Man hat die surjektive Abbildung $R[\frac{X_1}{Z_1}, \frac{Y_2}{Z_2}, \frac{X_3}{Z_3}][X_4, Y_4, Z_4] \to \mathcal{S}(U_{Z_3})$ durch die Zuordnung $(X_4, Y_4, Z_4) \mapsto (\frac{X_1}{Z_1}, \frac{Y_2}{Z_2}, \pi)$.

Ihr Kern ist $I_{Z_3} = (Y_4\frac{X_1}{Z_1} - X_4\frac{Y_2}{Z_2},\ Z_4\frac{X_1}{Z_1} - X_4\pi,\ Z_4\frac{Y_2}{Z_2} - Y_4\pi)$.

Also ergibt sich $\mathcal{S}(U_{Z_3}) \cong R[\frac{X_1}{Z_1}, \frac{Y_2}{Z_2}, \frac{X_3}{Z_3}][X_4, Y_4, Z_4]/I_{Z_3}$.

$\phi_{Z_3} : Proj\ \mathcal{S}(U_{Z_3}) \to U_{Z_3}$ ist gegeben durch $R[\frac{X_1}{Z_1}, \frac{Y_2}{Z_2}, \frac{X_3}{Z_3}] \to \mathcal{S}(U_{Z_3})$.

Über $X_3 \neq 0, Z_3 \neq 0$ werden $Proj\ \mathcal{S}(U_{X_3})$ und $Proj\ \mathcal{S}(U_{Z_3})$ zusammengeklebt durch

$$(X_4', Y_4', Z_4') \;=\; (X_4, Y_4, Z_4).$$

Dadurch erhält man **Proj** $\mathcal{S}$ als das zum Ideal I_{Z_3} gehörende Unterschema von $Spec\ R[\frac{X_1}{Z_1}, \frac{Y_2}{Z_2}] \times_R\ Proj\ R[X_3, Z_3] \times_R\ Proj\ R[X_4, Y_4, Z_4] \;=\; \mathbf{A}_R^2 \times_R \mathbf{P}_R^1 \times_R \mathbf{P}_R^2$ und den Morphismus $\phi : \mathbf{Proj}\ \mathcal{S} \longrightarrow \mathbf{A}_R^2 \times_{Spec\, R} \mathbf{P}_R^1$.

Die strikte Transformation von $\mathcal{V}_{2\nu-1}^*$ erhält man gemäß Satz 2.32 als den Abschluß

$\mathcal{V}_{2\nu} := \overline{\phi^{-1}(\mathcal{V}_{2\nu-1}^* - \overline{\{(\frac{X_1}{Z_1}, \frac{Y_2}{Z_2}, \pi)\}})}$ in **Proj** $\mathcal{S}$.

Dabei ist $\mathcal{V}_{2\nu}$ durch folgende Gleichungen gegeben:

In $X_4 \neq 0:$ $\quad \Rightarrow \quad \frac{Y_2}{Z_2} = \frac{Y_4}{X_4}\frac{X_1}{Z_1}$ und $\pi = \frac{Z_4}{X_4}\frac{X_1}{Z_1}$.

Damit ist $X_4 \cdot (Z_3\frac{X_1}{Z_1} - X_3\pi) = \frac{X_1}{Z_1}(Z_3X_4 - X_3Z_4) = 0$ und

$$\begin{aligned} X_4^2 \cdot \frac{F_{2\nu-1}^*}{Z_2} \;&=\; \frac{X_1}{Z_1} X_3(\pi Y_4^2 + \pi a_{1,1}X_4Y_4 + \pi a_{3,\nu+1}Y_4Z_4 - \\ &\qquad - \pi^{\nu-2}\frac{X_1}{Z_1}X_4^2 - a_{2,1}X_4^2 - a_{4,\nu+1}X_4Z_4 - a_{6,2\nu+1}Z_4^2) = 0, \end{aligned}$$

denn es ist

$\left(\frac{Y_2}{Z_2}\right)^2 Z_3 \;=\; \left(\frac{Y_4}{X_4}\right)^2 \left(\frac{X_1}{Z_1}\right)^2 Z_3 \;=\; \frac{X_1}{Z_1}X_3\pi\left(\frac{Y_4}{X_4}\right)^2, \quad a_{1,1}\frac{Y_2}{Z_2}\frac{X_1}{Z_1}Z_3 \;=\; a_{1,1}\frac{X_1}{Z_1}\frac{Y_4}{X_4}\pi X_3$ und $\pi a_{3,\nu+1}\frac{Y_2}{Z_2}Z_3 \;=\; \pi a_{3,\nu+1}\frac{Y_4}{X_4}\frac{X_1}{Z_1}Z_3 \;=\; \pi a_{3,\nu+1}\frac{X_1}{Z_1}\frac{Z_4}{X_4}X_3\frac{Y_4}{X_4}$.

Falls $\frac{X_1}{Z_1} = 0$, so folgt $\frac{Y_2}{Z_2} = \pi = 0$ und der Punkt ist $\notin \phi^{-1}(\mathcal{V}_{2\nu-1}^* - \overline{\{(\frac{X_1}{Z_1}, \frac{Y_2}{Z_2}, \pi)\}})$.

Also bleibt nur $Z_3X_4 - X_3Z_4 = 0$.

Falls $X_3 = 0$, so folgt wegen $X_4 \neq 0$ auch $Z_3 = 0$, was nicht sein kann.

Also bleibt nur

$$\begin{aligned} F_{2\nu} \quad := \quad & \pi Y_4^2 + \pi a_{1,1} X_4 Y_4 + \pi a_{3,\nu+1} Y_4 Z_4 - \\ & - \pi^{\nu-2} \frac{X_1}{Z_1} X_4^2 - a_{2,1} X_4^2 - a_{4,\nu+1} X_4 Z_4 - a_{6,2\nu+1} Z_4^2 = 0. \end{aligned}$$

In $Y_4 \neq 0:\quad \Rightarrow\quad \frac{X_1}{Z_1} = \frac{X_4}{Y_4}\frac{Y_2}{Z_2}$ und $\pi = \frac{Z_4}{Y_4}\frac{Y_2}{Z_2}$.

Damit ist $Y_4 \cdot (Z_3 \frac{X_1}{Z_1} - X_3 \pi) = \frac{Y_2}{Z_2}(Z_3 X_4 - X_3 Z_4) = 0$ und

$$\begin{aligned} Y_4 \cdot \frac{F^*_{2\nu-1}}{Z_2} \quad = \quad & \frac{Y_2}{Z_2}\Bigg(\frac{Y_2}{Z_2} Z_3 Y_4 + \pi a_{1,1} X_3 Y_4 + \pi a_{3,\nu+1} Z_3 Y_4 - \\ & - \pi^{\nu-2}\frac{X_1}{Z_1} X_3 X_4 - a_{2,1} X_3 X_4 - a_{4,\nu+1} X_3 Z_4 - a_{6,2\nu+1} Z_3 Z_4 \Bigg) = 0, \end{aligned}$$

denn es ist

$a_{1,1}\frac{Y_2}{Z_2}\frac{X_1}{Z_1} Z_3 = \frac{Y_2}{Z_2}\pi a_{1,1} X_3$ und $a_{4,\nu+1}\frac{X_1}{Z_1} Z_3 = a_{4,\nu+1}\frac{Y_2}{Z_2}\frac{X_4}{Y_4} Z_3 = \frac{Y_2}{Z_2} a_{4,\nu+1}\frac{Z_4}{Y_4} X_3$.

Falls $\frac{Y_2}{Z_2} = 0$, so folgt $\frac{X_1}{Z_1} = \pi = 0$ und der Punkt ist $\notin \phi^{-1}(\mathcal{V}^*_{2\nu-1} - \overline{\{(\frac{X_1}{Z_1}, \frac{Y_2}{Z_2}, \pi)\}})$.

Also bleibt nur $Z_3 X_4 - X_3 Z_4 = 0$ und

$$\begin{aligned} F'_{2\nu} \quad := \quad & \frac{Y_2}{Z_2} Z_3 Y_4 + \pi a_{1,1} X_3 Y_4 + \pi a_{3,\nu+1} Z_3 Y_4 - \\ & - \pi^{\nu-2}\frac{X_1}{Z_1} X_3 X_4 - a_{2,1} X_3 X_4 - a_{4,\nu+1} X_3 Z_4 - a_{6,2\nu+1} Z_3 Z_4 = 0. \end{aligned}$$

In $Z_4 \neq 0:\quad \Rightarrow\quad \frac{X_1}{Z_1} = \frac{X_4}{Z_4}\pi$ und $\frac{Y_2}{Z_2} = \frac{Y_4}{Z_4}\pi$.

Damit ist $Z_4 \cdot (Z_3 \frac{X_1}{Z_1} - X_3 \pi) = \pi(Z_3 X_4 - X_3 Z_4) = 0$ und

$$\begin{aligned} Z_4^2 \cdot \frac{F^*_{2\nu-1}}{Z_2} \quad = \quad & \pi Z_3(\pi Y_4^2 + \pi a_{1,1} X_4 Y_4 + \pi a_{3,\nu+1} Y_4 Z_4 - \\ & - \pi^{\nu-2}\frac{X_1}{Z_1} X_4^2 - a_{2,1} X_4^2 - a_{4,\nu+1} X_4 Z_4 - a_{6,2\nu+1} Z_4^2) = 0. \end{aligned}$$

Falls $\pi = 0$, so folgt $\frac{X_1}{Z_1} = \frac{Y_2}{Z_2} = 0$ und der Punkt ist $\notin \phi^{-1}(\mathcal{V}^*_{2\nu-1} - \overline{\{(\frac{X_1}{Z_1}, \frac{Y_2}{Z_2}, \pi)\}})$.

Also bleibt nur $Z_3 X_4 - X_3 Z_4 = 0$.

Falls $Z_3 = 0$, so folgt wegen $Z_4 \neq 0$ auch $X_3 = 0$, was nicht sein kann.

Also bleibt nur $F_{2\nu} = 0$.

Man bekommt also $\mathcal{V}_{2\nu}$
durch das Ideal $(Z_3 X_4 - X_3 Z_4,\ F'_{2\nu})$ in *Proj* $\mathcal{S}(U_{Y_4})$ und
durch das Ideal $(Z_3 X_4 - X_3 Z_4,\ F_{2\nu})$ in *Proj* $\mathcal{S}(U_{X_4})$ und *Proj* $\mathcal{S}(U_{Z_4})$.

$\widetilde{\mathcal{V}}_{2\nu}$ besteht aus folgenden Komponenten:

- $\underline{X_4 = Z_4 = 0} \Rightarrow Y_4 \neq 0 \Rightarrow \frac{Y_2}{Z_2} Z_3 = \underline{\frac{X_1}{Z_1} = 0}$. Es ergibt sich entweder $\underline{Z_3 = 0}$. Dies ist die Komponente $C_{2\nu}$ von $\mathcal{V}^*_{2\nu-1}$ mit dem Parameter $\frac{Y_2}{Z_2}$. Oder es ergibt sich

- $\underline{X_4 = Z_4 = \frac{X_1}{Z_1} = \frac{Y_2}{Z_2} = 0}$. Dies ist die Komponente $C_{2\nu+1}$ von $\mathcal{V}^*_{2\nu-1}$ mit dem Parameter $\frac{Z_3}{X_3}$.

  Sei nun zunächst $X_4 \neq 0$. Dann folgt $\frac{Z_4}{X_4}\frac{X_1}{Z_1} = 0$ und es ergibt sich entweder

- $\underline{\frac{Z_4}{X_4} = 0} \Rightarrow \underline{Z_3 = 0}$ und wegen $F_{2\nu} = 0 \Rightarrow \underline{\pi^{\nu-2}\frac{X_1}{Z_1} + a_{2,1} = 0}$. Dies ist die Komponente C_2 von $\mathcal{V}_3^*$. Sie tritt nur bei $\nu = 2$ auf, da $\tilde{a}_{2,1} \neq 0$ in k. Deswegen folgt dann aus $\frac{Y_2}{Z_2} = \frac{Y_4}{X_4}\frac{X_1}{Z_1}$, daß $\underline{\frac{Y_4}{X_4} = (\tilde{a}_{2,1})^{-1}\frac{Y_2}{Z_2}}$. Der Parameter ist $\frac{Y_2}{Z_2}$. Oder es ergibt sich

- $\underline{\frac{X_1}{Z_1} = 0} \Rightarrow \underline{\frac{Y_2}{Z_2} = 0}$ und $a_{2,1}X_4^2 + a_{4,\nu+1}X_4Z_4 + a_{6,2\nu+1}Z_4^2 = 0$ wegen $F_{2\nu} = 0$. Außerdem ist $Z_3X_4 - X_3Z_4 = 0$. Falls $Z_3 = 0$, so folgt $X_3 \neq 0$ und deshalb $Z_4 = 0$. Wegen $\tilde{a}_{2,1} \neq 0$ ist dann auch $X_4 = 0$. Dies ist keine Komponente, sondern der Schnittpunkt der beiden Komponenten $C_{2\nu}$ und $C_{2\nu+1}$. Also sei jetzt $Z_3 \neq 0$. Dann folgt

  $$Z_3^2 \cdot (a_{2,1}X_4^2 + a_{4,\nu+1}X_4Z_4 + a_{6,2\nu+1}Z_4^2) = Z_4^2(a_{2,1}X_3^2 + a_{4,\nu+1}X_3Z_3 + a_{6,2\nu+1}Z_3^2) = 0.$$

  Aus $Z_4 = 0$ folgt $X_4 = 0$ wegen $Z_3 \neq 0$. Dieser Fall wurde soeben als Komponente $C_{2\nu+1}$ schon behandelt. Somit bleibt nur $\underline{a_{2,1}\left(\frac{X_3}{Z_3}\right)^2 + a_{4,\nu+1}\frac{X_3}{Z_3} + a_{6,2\nu+1} = 0}$ und $\underline{\frac{X_3}{Z_3}Z_4 - X_4 = 0}$. Diese Komponente ist bei der Aufblasung neu hinzugekommen, sie heiße $C_{2\nu+2}$. Ihr Parameter ist $\frac{Y_4}{Z_4}$ beziehungsweise $\frac{Z_4}{Y_4}$.

- Sei nun $Z_4 \neq 0$. Dann folgt $\underline{\frac{X_1}{Z_1} = \frac{Y_2}{Z_2} = 0}$ und wegen $F_{2\nu} = 0$ folgt außerdem $a_{2,1}X_4^2 + a_{4,\nu+1}X_4Z_4 + a_{6,2\nu+1}Z_4^2 = 0$. Ferner ist $Z_3X_4 - X_3Z_4 = 0$. Wie soeben folgt daraus $\underline{a_{2,1}\left(\frac{X_3}{Z_3}\right)^2 + a_{4,\nu+1}\frac{X_3}{Z_3} + a_{6,2\nu+1} = \frac{X_3}{Z_3}Z_4 - X_4 = 0}$. Dies ist wieder die neue Komponente $C_{2\nu+2}$.

Die Komponenten $C_{2\nu-1}$ und $C_{2\nu}$ sind dabei doppelt, da sie nicht in dem aufgeblasenen Unterschema $\overline{(\frac{X_1}{Z_1}, \frac{Y_2}{Z_2}, \pi)}$ von $\mathcal{V}^*_{2\nu-1}$ lagen.

Die Komponente $C_{2\nu+1}$ ist auch doppelt. Denn $\pi = \frac{Z_4}{Y_4}\frac{Y_2}{Z_2}$, $\frac{X_1}{Z_1} = \frac{X_4}{Y_4}\frac{Y_2}{Z_2}$ und da Z_3 auf $C_{2\nu+1}$ nicht identisch verschwindet, gilt $\frac{X_4}{Y_4} = \frac{Z_4}{Y_4}\frac{X_3}{Z_3}$ im lokalen Ring $\mathcal{O}_{\mathcal{V}_{2\nu},\eta}$ des generischen Punktes η von $C_{2\nu+1}$. In $F'_{2\nu}$ eingesetzt, ergibt dies

$$\frac{Y_2}{Z_2}\left(1 + a_{1,1}\frac{Z_4}{Y_4}\frac{X_3}{Z_3} + a_{3,\nu+1}\frac{Z_4}{Y_4}\right) = \frac{Z_4}{Y_4}\left(\pi^{\nu-2}\frac{X_1}{Z_1}\left(\frac{X_3}{Z_3}\right)^2 + a_{2,1}\left(\frac{X_3}{Z_3}\right)^2 + a_{4,\nu+1}\frac{X_3}{Z_3} + a_{6,2\nu+1}\right).$$

Die Terme in Klammern auf beiden Seiten der Gleichung verschwinden nicht identisch auf $C_{2\nu+1}$ und sind somit ein Einheiten in $\mathcal{O}_{\mathcal{V}_{2\nu},\eta}$. Deshalb sind $\frac{Z_4}{Y_4}$ und $\frac{Y_2}{Z_2}$ beides Erzeugende des maximalen Ideals von $\mathcal{O}_{\mathcal{V}_{2\nu},\eta}$ und sie verschwinden zur Ordnung 1 auf $C_{2\nu+1}$. Somit ist die Ordnung von π auf $C_{2\nu+1}$ gleich 2. Dies bedeutet, daß $C_{2\nu+1}$ doppelt ist.

5.9.6 Die singulären Punkte von $\mathcal{V}_{2\nu}$

Da $\mathbf{A}^2_R \times_{Spec\,R} \mathbf{P}^1_R \times_{Spec\,R} \mathbf{P}^2_R$ ein reguläres sechsdimensionales Schema ist, wird das maximale Ideal des lokalen Ringes eines jeden abgeschlossenen Punktes von sechs Elementen erzeugt. Somit werden auch auf dem Unterschema $\mathcal{V}_{2\nu-1}$ höchstens sechs Elemente zum Erzeugen des maximalen Ideals eines abgeschlossenen Punktes benötigt.

Sei nun $P \in \widetilde{\mathcal{V}}_{2\nu}$ ein abgeschlossener Punkt und $\mathcal{M}$ das maximale Ideal in $\mathcal{O}_{\mathcal{V}_{2\nu},P}$.

Auf $\mathcal{V}_{2\nu} - (C_{2\nu+1} \cup C_{2\nu+2})$ liegen keine singulären Punkte,
da $\mathcal{V}_{2\nu} - (C_{2\nu+1} \cup C_{2\nu+2}) \cong \mathcal{V}^*_{2\nu-1} - C_{2\nu+1}$ und somit regulär ist.

$P = C_{2\nu} \cap C_{2\nu+1}$:
dann ist $Y_4 \neq 0$, $X_3 \neq 0$ und $\mathcal{M} = (\frac{X_1}{Z_1}, \frac{Y_2}{Z_2}, \frac{Z_3}{X_3}, \frac{X_4}{Y_4}, \frac{Z_4}{Y_4}, \pi)$. Es ist $\frac{X_1}{Z_1} = \frac{X_4}{Y_4}\frac{Y_2}{Z_2}$, $\pi = \frac{Z_4}{Y_4}\frac{Y_2}{Z_2}$, $\frac{Z_4}{Y_4} = \frac{Z_3}{X_3}\frac{X_4}{Y_4}$ und

$$\frac{X_4}{Y_4} = \frac{1}{\pi^{\nu-2}\frac{X_1}{Z_1} + a_{2,1}} \left(\frac{Y_2}{Z_2}\frac{Z_3}{X_3} + \pi a_{1,1} + \pi a_{3,\nu+1}\frac{Z_3}{X_3} - a_{4,\nu+1}\frac{Z_4}{Y_4} - a_{6,2\nu+1}\frac{Z_3}{X_3}\frac{Z_4}{Y_4} \right).$$

Das bedeutet $\mathcal{M} = (\frac{Y_2}{Z_2}, \frac{Z_3}{X_3})$ und P ist regulär.

$P \in C_{2\nu+1} - C_{2\nu}$:
dann ist $Z_3 \neq 0$ und $\mathcal{M} = (\frac{X_1}{Z_1}, \frac{Y_2}{Z_2}, p(X_3, Z_3), X_4, Z_4, \pi)$. Somit ist $Y_4 \notin \mathcal{M}$ und es gilt $\frac{X_1}{Z_1} = \frac{X_4}{Y_4}\frac{Y_2}{Z_2}$, $\pi = \frac{Z_4}{Y_4}\frac{Y_2}{Z_2}$, $X_4 = \frac{X_3}{Z_3}Z_4$ und

$$\frac{Y_2}{Z_2} = -\pi a_{1,1}\frac{X_3}{Z_3} - \pi a_{3,\nu+1} + \pi^{\nu-2}\frac{X_1}{Z_1}\frac{X_3}{Z_3}\frac{X_4}{Y_4} + a_{2,1}\frac{X_3}{Z_3}\frac{X_4}{Y_4} + a_{4,\nu+1}\frac{X_3}{Z_3}\frac{Z_4}{Y_4} + a_{6,2\nu+1}\frac{Z_4}{Y_4}.$$

Das bedeutet $\mathcal{M} = (Z_4, p)$ und P ist regulär.

5.9.7 Untersuchung von $C_{2\nu+2}$

Die Struktur der Komponente $C_{2\nu+2}$ hängt von der Art der Nullstellen des Polynoms $G_{2\nu} := a_{2,1}\left(\frac{X_3}{Z_3}\right)^2 + a_{4,\nu+1}\frac{X_3}{Z_3} + a_{6,2\nu+1}$ in $\bar{k}$ ab.

Habe nun zunächst $G_{2\nu}$ zwei verschiedene Nullstellen in $\bar{k}$. Also zerfällt $C_{2\nu+2}$ über $\bar{k}$ in zwei Komponenten. Diese sollen mit $C_{2\nu+2}$ und $C_{2\nu+3}$ bezeichnet werden.

$P \in (C_{2\nu+2} \cup C_{2\nu+3}) - C_{2\nu+1}$:
dann ist $Z_3 \neq 0$ und $\mathcal{M} = (\frac{X_1}{Z_1}, \frac{Y_2}{Z_2}, g(\frac{X_3}{Z_3}), \frac{X_3}{Z_3}Z_4 - X_4, p(X_4, Y_4, Z_4), \pi)$, wobei $G_{2\nu} \equiv g(\frac{X_3}{Z_3}) \cdot h \mod \pi$ in $R[\frac{X_3}{Z_3}]$ ist. Es ist $Z_4 \notin \mathcal{M}$, da sonst auch $X_4 \in \mathcal{M}$ und damit $P \in C_{2\nu+1}$ wäre. Außerdem ist $h \notin \mathcal{M}$, da sonst wegen der Verschiedenheit der beiden Nullstellen von $G_{2\nu}$ auch $1 \in \mathcal{M}$ wäre. Also gilt $\frac{X_1}{Z_1} = \frac{X_4}{Z_4}\pi$, $\frac{Y_2}{Z_2} = \frac{Y_4}{Z_4}\pi$ und

$$g \equiv \frac{1}{h\,Z_4}\left(\frac{Y_2}{Z_2}Y_4 + \pi a_{1,1}\frac{X_3}{Z_3}Y_4 + \pi a_{3,\nu+1}Y_4 - \pi^{\nu-2}\frac{X_1}{Z_1}\frac{X_3}{Z_3}X_4\right) \mod \pi.$$

Da auf $\mathcal{V}_{2\nu}$ ohnehin $\frac{X_3}{Z_3}Z_4 - X_4$ gilt, bedeutet das $\mathcal{M} = (p, \pi)$ und P ist regulär.

Die Komponenten $C_{2\nu+2}$ und $C_{2\nu+3}$ haben Vielfachheit eins. Denn analog zu der vorangegangenen Folgerung $\mathcal{M} = (p, \pi)$ zeigt man, daß das maximale Ideal des lokalen Ringes $\mathcal{O}_{\mathcal{V}_{2\nu},\eta}$ des generischen Punktes η von $C_{2\nu+2}$ von π erzeugt wird. Dies bedeutet, daß π auf $C_{2\nu+2}$ mit Ordnung 1 verschwindet und $C_{2\nu+2}$ einfach ist. Ebenso ist $C_{2\nu+3}$ einfach.

Also ist $\mathcal{V}_{2\nu}$ regulär und als abgeschlossenes Unterschema eines Produkts von $\mathbf{P}_R^m$ auch eigentlich über R. Die spezielle Faser von $\mathcal{V}_{2\nu}$ besteht aus den vier einfachen Komponenten C_1, C_2, $C_{2\nu+2}$ und $C_{2\nu+3}$ und den doppelten Komponenten $C_3, \dots, C_{2\nu+1}$. Also hat man den Reduktionstyp I_n^* mit $n = 2\nu - 2$, es folgt, daß $\mathcal{V}_{2\nu}$ minimal ist und $\mathcal{C}$ ergibt sich durch Zusammenkleben von $\mathcal{V}_{2\nu}$ mit all den Teilen, die bis hierher weggeschnitten wurden. Es ist $m = 2\nu + 3 = n + 5$ und $c = 4$, falls die Nullstellen von $G_{2\nu}$ in k liegen und $c = 2$, falls sie nicht in k liegen. Die weitere Auswertung wird in Abschnitt 5.9.8 durchgeführt.

Habe nun $G_{2\nu}$ eine doppelte Nullstelle in $\bar{k}$. Da k perfekt ist, liegt diese in k und wird durch die Translation $X_3 \to X_3 + rZ_3$, $Z_3 \to Z_3$ auf $\frac{X_3}{Z_3} = 0$ verschoben. Da auf E/K gilt $\frac{X_3}{Z_3} = \frac{X}{\pi^\nu Z}$, bewirkt diese auf E/K die Translation $X \to X + r\pi^\nu Z$, $Y \to Y$, $Z \to Z$. Also kann man ohne Einschränkung annehmen, daß $\pi \mid a_{4,\nu+1}$, $a_{6,2\nu+1}$.

Nach Satz 2.28 wird $\pi \mid a_1, a_2,\ \pi^{\nu+1} \mid a_3,\ \pi^{\nu+2} \mid a_4,\ \pi^{2\nu+2} \mid a_6$.

<u>Auf $C_{2\nu+2}$ liegen singuläre Punkte</u>

in $Z_4 \neq 0$ auf $\overline{\{(\frac{X_1}{Z_1}, \frac{Y_2}{Z_2}, X_3, X_4, Y_4^2 + a_{3,\nu+1}Y_4Z_4 - a_{6,2\nu+2}Z_4^2, \pi)\}}$, da dort $F_{2\nu} \in \mathcal{M}^2$ ist (Vergleiche Abschnitt 5.4).

Also wird als nächstes die doppelte Gerade $C_{2\nu+2} : \frac{X_1}{Z_1} = \frac{Y_2}{Z_2} = \frac{X_3}{Z_3} = X_4 = \pi = 0$ aufgeblasen.

Dazu betrachte man das offene Unterschema $\mathcal{V}_{2\nu} - \overline{\{(Z_3)\}}$ von $\mathcal{V}_{2\nu}$, in dem $C_{2\nu+2}$ liegt.

Dort gilt $\underline{X_4 = Z_4\frac{X_3}{Z_3}}$. Daraus folgt, daß $Y_4\frac{X_1}{Z_1} = X_4\frac{Y_2}{Z_2} = Z_4\frac{X_3}{Z_3}\frac{Y_2}{Z_2} = Y_4\pi\frac{X_3}{Z_3}$ und $Z_4\left(\frac{X_1}{Z_1} - \pi\frac{X_3}{Z_3}\right) = 0$ ist. Da aus $Z_4 = 0$ folgt $X_4 = 0$ und damit $Y_4 \neq 0$ erhält man $\underline{\frac{X_1}{Z_1} = \pi\frac{X_3}{Z_3}}$. Damit wird $Y_4\frac{X_1}{Z_1} - X_4\frac{Y_2}{Z_2} = \frac{X_3}{Z_3}\left(Y_4\pi - Z_4\frac{Y_2}{Z_2}\right)$ und $Z_4\frac{X_1}{Z_1} - X_4\pi = Z_4\pi\frac{X_3}{Z_3} - Z_4\pi\frac{X_3}{Z_3} = 0$.

Aus $X_4 \neq 0$ folgt $Z_4 \neq 0$ und über $Z_4 \neq 0$ wird

$$\begin{aligned}\frac{F_{2\nu}}{Z_4} &= \frac{Y_2}{Z_2}Y_4 + \pi a_{1,1}\frac{X_3}{Z_3}Y_4 + \pi a_{3,\nu+1}Y_4 - \pi^{\nu-1}\left(\frac{X_3}{Z_3}\right)^3 Z_4 - a_{2,1}\left(\frac{X_3}{Z_3}\right)^2 Z_4 - \\ &\quad - \pi a_{4,\nu+2}\frac{X_3}{Z_3}Z_4 - \pi a_{6,2\nu+2}Z_4 \;=\; F^*_{2(\nu+1)-2}\left(\frac{X_3}{Z_3}, \frac{Y_2}{Z_2}, Y_4, Z_4\right).\end{aligned}$$

Und über $Y_4 \neq 0$ wird ebenfalls $\dfrac{F'_{2\nu}}{Z_3} = F^*_{2(\nu+1)-2}\left(\dfrac{X_3}{Z_3}, \dfrac{Y_2}{Z_2}, Y_4, Z_4\right)$.

Also ist $\mathcal{V}_{2\nu} - \overline{\{(Z_3)\}} \cong$

$$\cong \ \mathit{Proj}\ R[\frac{X_3}{Z_3}, \frac{Y_2}{Z_2}][Y_4, Z_4]/\left(Y_4\pi - Z_4\frac{Y_2}{Z_2},\ F^*_{2(\nu+1)-2}\left(\frac{X_3}{Z_3}, \frac{Y_2}{Z_2}, Y_4, Z_4\right)\right) \ = \ \mathcal{V}^*_{2(\nu+1)-2}.$$

Damit verlaufen alle weiteren Aufblasungen wie die in Abschnitt 5.9.2 geschilderte.

Bei jedem Durchlaufen dieser Schleife werden a_3, a_4 durch eine zusätzliche Potenz und a_6 durch zwei zusätzliche Potenzen von π teilbar gemacht. Das bedeutet, daß auch b_4 durch eine zusätzliche und b_6 und b_8 durch zwei zusätzliche Potenzen von π teilbar werden. Somit wird bei jedem Durchlauf Δ durch zwei zusätzliche Potenzen von π teilbar. Da aber Δ bei allen durchgeführten Translationen invariant ist, bricht der Prozeß schließlich ab.

5.9.8 Auswertung

Die Schleife bricht genau dann ab, wenn erstmals die Komponente

$$\begin{array}{llll} C_{2\nu+1}: & G_{2\nu-1} = \left(\frac{Y_2}{Z_2}\right)^2 + \tilde{a}_{3,\nu}\frac{Y_2}{Z_2} - \tilde{a}_{6,2\nu} = 0 & \text{bei} & n = 2\nu - 3 \text{ ungerade,} \\ C_{2\nu+2}: & G_{2\nu} = a_{2,1}\left(\frac{X_3}{Z_3}\right)^2 + a_{4,\nu+1}\frac{X_3}{Z_3} + a_{6,2\nu+1} = 0 & \text{bei} & n = 2\nu - 2 \text{ gerade} \end{array}$$

von $\mathcal{V}_{n+2}$ über $\bar{k}$ in zwei Geraden zerfällt.

Der Reduktionstyp ist dann I_n^*, $m = n + 5$ und $c = 4$, falls diese beiden Geraden über k definiert sind und $c = 2$, falls sie nicht über k definiert sind. Bei $\mathrm{char}(k) \neq 2$ gilt ferner $n = v(\Delta) - 6$. Dies sieht man so. Es gilt für die Diskriminanten der Polynome $G_{2\nu-1}$ und $G_{2\nu}$

$$\begin{array}{lclcl} \tilde{a}_{3,\nu}{}^2 + 4\,\tilde{a}_{6,2\nu} & = 0 & \iff & \pi^{2\nu+1} \mid a_3^2 + 4a_6 = b_6 & \text{und} \\ \tilde{a}_{4,\nu+1}{}^2 - 4\,\tilde{a}_{2,1}\,\tilde{a}_{6,2\nu+1} & = 0 & \iff & \pi^{2\nu+3} \mid a_4^2 - 4a_2a_6. & \end{array}$$

Bricht die Schleife bei $n = 2\nu - 3$ ungerade ab, so folgt $v(b_6) = 2\nu$ und $\pi^{2(\nu-1)+3} = \pi^{2\nu+1} \mid a_4^2 - 4a_2a_6$. Da $\pi \mid a_1,\, a_2,\ \pi^2 \nmid a_2,\ \pi^\nu \mid a_3,\, a_4$ und $\pi^{2\nu} \mid a_6$ gilt, folgt $\pi^{2\nu+1} \mid a_4^2$ und damit $\pi^{\nu+1} \mid a_4$. Also gilt $\pi^{\nu+1} \mid a_1a_3 + 2a_4 = b_4$. In $\mathrm{char}(k) \neq 2$ ist nun $v(b_2) = v(a_2) = 1$ und deshalb $v(b_8) = v(b_2b_6 - b_4^2) = 2\nu + 1$. Wegen $\pi^{3\nu+3} \mid b_4^3,\ \pi^{4\nu} \mid b_6^2,\ \pi^{3\nu+2} \mid b_2b_4b_6$ folgt daraus schließlich $v(\Delta) = v(b_2^2b_8) = 2\nu + 3 = n + 6$.

Bricht die Schleife bei $n = 2\nu - 2$ gerade ab, so folgt $v(a_4^2 - 4a_2a_6) = 2\nu + 2$ und $\pi^{2\nu+1} \mid b_6$. Da $\pi \mid a_1,\, a_2,\ \pi^2 \nmid a_2,\ \pi^\nu \mid a_3,\ \pi^{\nu+1} \mid a_4$ und $\pi^{2\nu+1} \mid a_6$ folgt $\pi^{2\nu+1} \mid b_6 - 4a_6 = a_3^2$ und damit $\pi^{\nu+1} \mid a_3$. Wegen $\pi^{2\nu+3} \mid a_1^2a_6,\ a_2a_3^2,\ a_1a_3a_4$ gilt $v(b_8) = v(4a_2a_6 - a_4^2) = 2\nu + 2$. Und da in $\mathrm{char}(k) \neq 2$ wieder $v(b_2) = v(a_2) = 1$ ist, folgt mit $\pi^{3\nu+3} \mid (a_1a_3 + 2a_4)^3 = b_4^3,\ \pi^{4\nu+2} \mid b_6^2,\ \pi^{3\nu+3} \mid b_2b_4b_6$ endlich $v(\Delta) = v(b_2^2b_8) = 2\nu + 4 = n + 6$.

Damit sind die Behauptungen von Schritt 7 bewiesen.

5.10 Beweis von Schritt 8

In Abschnitt 5.8.4 waren die Komponente C_3 von $\mathcal{V}_2$ und dazu die Nullstellen des Polynoms $G_2 = \left(\frac{X_1}{Z_1}\right)^3 + a_{2,1}\left(\frac{X_1}{Z_1}\right)^2 + a_{4,2}\frac{X_1}{Z_1} + a_{6,3}$ in $\bar{k}$ betrachtet worden. Die ersten beiden Möglichkeiten wurden in den Schritten 6 und 7 behandelt. Es steht noch der Fall aus, daß G_2 eine dreifache Nullstelle in $\bar{k}$ hat. Dies soll jetzt in Schritt 8 der Fall sein. Da k perfekt ist, liegt diese in k und besitzt einen Repräsentanten $r \in R$. Sie wird durch die Translation $X_1 \to X_1 + rZ_1,\ Y_1 \to Y_1,\ Z_1 \to Z_1$ auf $\frac{X_1}{Z_1} = 0$ verschoben. Also kann man ohne Einschränkung annehmen, daß $\pi \mid a_{2,1},\ a_{4,2},\ a_{6,3}$. Diese Translation bewirkt auf E/K den Übergang $X \to X + r\pi Z,\ \ Y \to Y,\ \ Z \to Z$.

Nach Satz 2.28 wird $\pi \mid a_1,\ \ \pi^2 \mid a_2,\ a_3,\ \ \pi^3 \mid a_4,\ \ \pi^4 \mid a_6$ und

$$F_2 = \frac{Y_1}{Z_1}Y_2 + \pi a_{1,1}\frac{X_1}{Z_1}Y_2 + \pi a_{3,2}Y_2 - \left(\frac{X_1}{Z_1}\right)^3 Z_2 - \pi a_{2,2}\left(\frac{X_1}{Z_1}\right)^2 Z_2 - \pi a_{4,3}\frac{X_1}{Z_1}Z_2 - \pi a_{6,4}Z_2.$$

Es war $\mathcal{S}(\mathcal{U}_{Z_1}) \cong R[\frac{X_1}{Z_1}, \frac{Y_1}{Z_1}][Y_2, Z_2]/I_{Z_1}$ mit $I_{Z_1} = (Y_2\pi - Z_2\frac{Y_1}{Z_1})$ und das Schema $\mathcal{V}_2$ war über $Z_1 \neq 0$ durch das Ideal (F_2) in $Proj\ \ \mathcal{S}(\mathcal{U}_{Z_1})$ gegeben (Vergleiche Abschnitt 5.8.2).

Die Komponenten C_2 und C_3 von $\mathcal{V}_2$ haben die Gestalt

$$C_2 :\ \frac{Y_1}{Z_1} = Z_2 = \pi = 0 \qquad \text{und} \qquad C_3 :\ \frac{X_1}{Z_1} = \frac{Y_1}{Z_1} = \pi = 0.$$

Wie in Abschnitt 5.8.2 gezeigt, hat die Komponente C_1 Vielfachheit eins und die Komponente C_2 Vielfachheit zwei.

5.10.1 Die singulären Punkte von $\mathcal{V}_2$

Wir haben bereits in Abschnitt 5.8.3 festgestellt, daß auf $C_1 \cup C_2$ keine singulären Punkte liegen. Sei nun

$$A := \overline{\left\{\left(\frac{X_1}{Z_1},\ \frac{Y_1}{Z_1},\ Y_2^2 + a_{3,2}Y_2Z_2 - a_{6,4}Z_2^2,\ \pi\right)\right\}} \ \subset C_3 - C_2.$$

<u>$P \in C_3 - C_2 - A$:</u>
dann ist $Z_1 \neq 0$, $Z_2 \neq 0$ und $\mathcal{M} = (\frac{X_1}{Z_1}, \frac{Y_1}{Z_1}, p(\frac{Y_2}{Z_2}), \pi)$. Somit gilt $\frac{Y_1}{Z_1} = \frac{Y_2}{Z_2}\pi$ und

$$\pi \ = \ \frac{1}{\left(\frac{Y_2}{Z_2}\right)^2 + a_{3,2}\frac{Y_2}{Z_2} - a_{6,4}}\ \frac{X_1}{Z_1}\left(-\pi a_{1,1}\frac{Y_2}{Z_2} + \left(\frac{X_1}{Z_1}\right)^2 + \pi a_{2,2}\frac{X_1}{Z_1} + \pi a_{4,3}\right).$$

Das bedeutet $\mathcal{M} = (\frac{X_1}{Z_1}, p)$ und P ist regulär.

<u>Auf A:</u> liegen singuläre Punkte,
da dort $\frac{Y_1}{Z_1} = \frac{Y_2}{Z_2}\pi$ gilt und deshalb $F_2 \in \mathcal{M}^2$ ist (Vergleiche Abschnitt 5.4).

Also wird als nächstes das abgeschlossene Unterschema A von $\mathcal{V}_2$ aufgeblasen. Da das Polynom $Y_2^2 + \tilde{a}_{3,2}Y_2Z_2 - \tilde{a}_{6,4}Z_2^2$ in Schritt 8 zwei verschiedene Nullstellen in $\bar{k}$ hat, besteht A über $\bar{k}$ aus zwei verschiedenen Punkten.

Dazu betrachte man das offene Unterschema von $\mathcal{V}_2$

$$\begin{aligned} A \subset \mathcal{V}_2 - (\overline{\{(Z_1)\}} \cup \overline{\{(Z_2)\}}) \ &= \ Spec\ \ R[\frac{X_1}{Z_1}, \frac{Y_1}{Z_1}, \frac{Y_2}{Z_2}]/(\frac{Y_1}{Z_1} - \frac{Y_2}{Z_2}\pi, F_2) \\ &\cong \ Spec\ \ R[\frac{X_1}{Z_1}, \frac{Y_2}{Z_2}]/(\frac{1}{Z_2}F_2), \end{aligned}$$

wobei $\frac{1}{Z_2}F_2 = \pi\left(\frac{Y_2}{Z_2}\right)^2 + \pi a_{3,2}\frac{Y_2}{Z_2} - \pi a_{6,4} + \pi a_{1,1}\frac{X_1}{Z_1}\frac{Y_2}{Z_2} - \left(\frac{X_1}{Z_1}\right)^3 - \pi a_{2,2}\left(\frac{X_1}{Z_1}\right)^2 - \pi a_{4,3}\frac{X_1}{Z_1}$ ist.

5.10.2 Aufblasen von $\mathcal{V}_2$ entlang A

$$\mathcal{I} = (\frac{X_1}{Z_1},\ \left(\frac{Y_2}{Z_2}\right)^2 + a_{3,2}\frac{Y_2}{Z_2} - a_{6,4},\ \pi), \qquad \mathcal{S} = \bigoplus_{d\geq 0}\mathcal{I}^d$$

Man hat die surjektive Abbildung $R\,[\frac{X_1}{Z_1},\frac{Y_2}{Z_2}][X_3,Y_3,Z_3] \to \mathcal{S}$ durch die Zuordnung $(X_3,Y_3,Z_3) \mapsto (\frac{X_1}{Z_1},\ \left(\frac{Y_2}{Z_2}\right)^2 + a_{3,2}\frac{Y_2}{Z_2} - a_{6,4},\ \pi)$.

Ihr Kern ist $I_{Z_2} = \Big(Y_3\frac{X_1}{Z_1} - X_3\left(\left(\frac{Y_2}{Z_2}\right)^2 + a_{3,2}\frac{Y_2}{Z_2} - a_{6,4}\right),\ X_3\pi - Z_3\frac{X_1}{Z_1},$

$$Y_3\pi - Z_3\left(\left(\frac{Y_2}{Z_2}\right)^2 + a_{3,2}\frac{Y_2}{Z_2} - a_{6,4}\right)\Big).$$

Also ergibt sich $\mathcal{S} \cong R\,[\frac{X_1}{Z_1},\frac{Y_2}{Z_2}][X_3,Y_3,Z_3]/I_{Z_2}$.

$\phi : Proj\ \mathcal{S} \to \mathbf{A}^2_R$ ist gegeben durch $R\,[\frac{X_1}{Z_1},\frac{Y_2}{Z_2}] \to \mathcal{S}$.

Die strikte Transformation von $\mathcal{V}_2$ erhält man gemäß Satz 2.32 als den Abschluß

$\mathcal{V}_3 := \overline{\phi^{-1}(\mathcal{V}_2 - A)}$ in **Proj** $\mathcal{S}$.

Dabei ist $\mathcal{V}_3$ durch folgende Gleichungen gegeben:

In $X_3 \neq 0:\quad \Rightarrow\quad \left(\frac{Y_2}{Z_2}\right)^2 + a_{3,2}\frac{Y_2}{Z_2} - a_{6,4} = \frac{Y_3}{X_3}\frac{X_1}{Z_1}$ und $\pi = \frac{Z_3}{X_3}\frac{X_1}{Z_1}$.

Damit ist $X_3^2\cdot\frac{F_2}{Z_2} = \left(\frac{X_1}{Z_1}\right)^2(Y_3Z_3 + a_{1,1}\frac{Y_2}{Z_2}X_3Z_3 - \frac{X_1}{Z_1}X_3^2 - a_{2,2}\frac{X_1}{Z_1}X_3Z_3 - a_{4,3}X_3Z_3) = 0$.

Falls $\frac{X_1}{Z_1} = 0$, so folgt $\left(\frac{Y_2}{Z_2}\right)^2 + a_{3,2}\frac{Y_2}{Z_2} - a_{6,4} = \pi = 0$ und der Punkt ist $\notin \phi^{-1}(\mathcal{V}_2 - A)$.

Also bleibt nur

$$F_3 \ := \ Y_3Z_3 + a_{1,1}\frac{Y_2}{Z_2}X_3Z_3 - \frac{X_1}{Z_1}X_3^2 - a_{2,2}\frac{X_1}{Z_1}X_3Z_3 - a_{4,3}X_3Z_3 \ = \ 0.$$

In $Y_3 \neq 0:\quad \Rightarrow\quad \frac{X_1}{Z_1} = \frac{X_3}{Y_3}\left(\left(\frac{Y_2}{Z_2}\right)^2 + a_{3,2}\frac{Y_2}{Z_2} - a_{6,4}\right)$ und $\pi = \frac{Z_3}{Y_3}\left(\left(\frac{Y_2}{Z_2}\right)^2 + a_{3,2}\frac{Y_2}{Z_2} - a_{6,4}\right)$.

Damit ist $Y_3^2\cdot\frac{F_2}{Z_2} = \left(\left(\frac{Y_2}{Z_2}\right)^2 + a_{3,2}\frac{Y_2}{Z_2} - a_{6,4}\right)^2(Y_3Z_3 + a_{1,1}\frac{Y_2}{Z_2}X_3Z_3 - \frac{X_1}{Z_1}X_3^2 -$
$- a_{2,2}\frac{X_1}{Z_1}X_3Z_3 - a_{4,3}X_3Z_3) = 0$.

Falls $\left(\frac{Y_2}{Z_2}\right)^2 + a_{3,2}\frac{Y_2}{Z_2} - a_{6,4} = 0$, so folgt $\frac{X_1}{Z_1} = \pi = 0$ und der Punkt ist $\notin \phi^{-1}(\mathcal{V}_2 - A)$.

Also bleibt nur $F_3 = 0$.

In $Z_3 \neq 0:\quad \Rightarrow\quad \frac{X_1}{Z_1} = \frac{X_3}{Z_3}\pi$ und $\left(\frac{Y_2}{Z_2}\right)^2 + a_{3,2}\frac{Y_2}{Z_2} - a_{6,4} = \frac{Y_3}{Z_3}\pi$.

Damit ist $Z_3^2\cdot\frac{F_2}{Z_2} = \pi^2(Y_3Z_3 + a_{1,1}\frac{Y_2}{Z_2}X_3Z_3 - \frac{X_1}{Z_1}X_3^2 - a_{2,2}\frac{X_1}{Z_1}X_3Z_3 - a_{4,3}X_3Z_3) = 0$.

Falls $\pi = 0$, so folgt $\frac{X_1}{Z_1} = \left(\frac{Y_2}{Z_2}\right)^2 + a_{3,2}\frac{Y_2}{Z_2} - a_{6,4} = 0$ und der Punkt ist $\notin \phi^{-1}(\mathcal{V}_2 - A)$.

Also bleibt nur $F_3 = 0$.

Man bekommt also $\mathcal{V}_3 \ = \ Proj \ \ R[\frac{X_1}{Z_1}, \frac{Y_2}{Z_2}][X_3, Y_3, Z_3]/(I_{Z_2}, F_3)$.

$\widetilde{\mathcal{V}}_3$ besteht aus folgenden Komponenten:

$\pi = 0 \Rightarrow Z_3 \frac{X_1}{Z_1} = Z_3 \left(\left(\frac{Y_2}{Z_2} \right)^2 + a_{3,2} \frac{Y_2}{Z_2} - a_{6,4} \right) = 0$

- $\underline{Z_3 = 0} \Rightarrow$ wegen $F_3 = 0$, daß $\frac{X_1}{Z_1} X_3^2 = 0$ ist. Sei zunächst $\underline{X_3 = 0} \Rightarrow Y_3 \neq 0 \Rightarrow$ $\underline{\frac{X_1}{Z_1} = 0}$. Dies ist die Komponente C_3 von $\mathcal{V}_2$ mit dem Parameter $\frac{Y_2}{Z_2}$. Sei nun
- $\underline{Z_3 = \frac{X_1}{Z_1} = 0} \Rightarrow X_3 \left(\left(\frac{Y_2}{Z_2} \right)^2 + a_{3,2} \frac{Y_2}{Z_2} - a_{6,4} \right) = 0$. Den Fall $X_3 = 0$ haben wir soeben als Komponente C_3 schon behandelt. Also bleibt noch $\underline{\left(\frac{Y_2}{Z_2} \right)^2 + a_{3,2} \frac{Y_2}{Z_2} - a_{6,4} = 0}$. Diese Komponente ist bei der Aufblasung neu hinzugekommen, sie heiße C_4. Ihr Parameter ist $\frac{Y_3}{X_3}$ beziehungsweise $\frac{X_3}{Y_3}$. Jetzt fehlt noch
- $\underline{\frac{X_1}{Z_1} = \left(\frac{Y_2}{Z_2} \right)^2 + a_{3,2} \frac{Y_2}{Z_2} - a_{6,4} = 0}$. Wegen $F_3 = 0$ folgt $Z_3(Y_3 + a_{1,1} \frac{Y_2}{Z_2} X_3 - a_{4,3} X_3) = 0$. Den Fall $Z_3 = 0$ haben wir soeben als Komponente C_4 schon behandelt. Also bleibt noch $\underline{Y_3 = -a_{1,1} \frac{Y_2}{Z_2} X_3 + a_{4,3} X_3}$. Diese Komponente ist auch bei der Aufblasung neu hinzugekommen, sie heiße C_5. Ihr Parameter ist $\frac{X_3}{Z_3}$ beziehungsweise $\frac{Z_3}{X_3}$.

Die Komponente C_3 ist dabei dreifach. Denn es gilt $\pi = \frac{Z_3}{Y_3} \left(\left(\frac{Y_2}{Z_2} \right)^2 + a_{3,2} \frac{Y_2}{Z_2} - a_{6,4} \right)$ und $\frac{X_1}{Z_1} = \frac{X_3}{Y_3} \left(\left(\frac{Y_2}{Z_2} \right)^2 + a_{3,2} \frac{Y_2}{Z_2} - a_{6,4} \right)$. Da der Term in Klammern in beiden Gleichungen auf C_3 nicht identisch verschwindet, ist er eine Einheit im lokalen Ring $\mathcal{O}_{\mathcal{V}_3,\eta}$ des generischen Punktes η von C_3. Das bedeutet, daß $\pi \sim Z_3$ und $\frac{X_1}{Z_1} \sim X_3$ in $\mathcal{O}_{\mathcal{V}_3,\eta}$ ist. Weil nun

$$Z_3(Y_3 + a_{1,1} \frac{Y_2}{Z_2} X_3 - a_{2,2} \frac{X_1}{Z_1} X_3 - a_{4,3} X_3) = \frac{X_1}{Z_1} X_3^2$$

ist und in der Klammer alle Summanden außer Y_3 auf C_3 verschwinden, ist diese eine Einheit in $\mathcal{O}_{\mathcal{V}_3,\eta}$. Deshalb ist sowohl $\frac{X_1}{Z_1}$ als auch X_3 Uniformisierende von C_3 und die Ordnung von π auf C_3 gleich 3. Dies bedeutet, daß C_3 dreifach ist.

5.10.3 Untersuchung von C_4 und C_5

Die Struktur der Komponenten C_4 und C_5 hängt von der Art der Nullstellen des Polynoms $G_3 := \left(\frac{Y_2}{Z_2} \right)^2 + a_{3,2} \frac{Y_2}{Z_2} - a_{6,4}$ in $\bar{k}$ ab.

In Schritt 8 hat G_3 zwei verschiedene Nullstellen in $\bar{k}$, das heißt $\pi \nmid a_{3,2}^2 + 4a_{6,4}$, also $\pi^5 \nmid b6$. Dies bedeutet, daß C_4 über $\bar{k}$ in zwei Komponenten C_4 und C_6 und C_5 über $\bar{k}$ in zwei Komponenten C_5 und C_7 zerfällt.

Mit der Bezeichnung $\alpha \neq \beta \in \bar{k}$ für die beiden Nullstellen von G_3 bekommt man über $\bar{k}$:

$$C_4 \ : \ \frac{X_1}{Z_1} \ = \ \frac{Y_2}{Z_2} - \alpha \ = \ Z_3 \ = \ \pi \ = \ 0,$$

$$\begin{array}{lclclclclclcl}
C_5 & : & \frac{X_1}{Z_1} & = & \frac{Y_2}{Z_2} - \alpha & = & Y_3 + a_{1,1}\frac{Y_2}{Z_2}X_3 - a_{4,3}X_3 & = & \pi & = & 0, \\
C_6 & : & \frac{X_1}{Z_1} & = & \frac{Y_2}{Z_2} - \beta & = & Z_3 & = & \pi & = & 0, \\
C_7 & : & \frac{X_1}{Z_1} & = & \frac{Y_2}{Z_2} - \beta & = & Y_3 + a_{1,1}\frac{Y_2}{Z_2}X_3 - a_{4,3}X_3 & = & \pi & = & 0.
\end{array}$$

Die Komponenten C_4 und C_6 sind dabei doppelt. Denn über $X_3 \neq 0$ ist $\pi = \frac{Z_3}{X_3}\frac{X_1}{Z_1}$ und $\left(\frac{Y_2}{Z_2} - \alpha\right)\left(\frac{Y_2}{Z_2} - \beta\right) \equiv \frac{Y_3}{X_3}\frac{X_1}{Z_1} \bmod \pi$. Da $\left(\frac{Y_2}{Z_2} - \beta\right)$ und Y_3 auf C_4 nicht identisch verschwinden, ist $\left(\frac{Y_2}{Z_2} - \alpha\right) \sim \frac{X_1}{Z_1}$ im lokalen Ring $\mathcal{O}_{\mathcal{V}_3,\eta}$ des generischen Punktes η von C_4. In der Gleichung

$$Z_3(Y_3 + a_{1,1}\frac{Y_2}{Z_2}X_3 - a_{2,2}\frac{X_1}{Z_1}X_3 - a_{4,3}X_3) = \frac{X_1}{Z_1}X_3^2$$

sind sowohl die Klammer auf der linken Seite, als auch X_3 auf der rechten Seite Einheiten in $\mathcal{O}_{\mathcal{V}_3,\eta}$. Somit verschwinden $\frac{X_1}{Z_1}$ und Z_3 beide zur Ordnung 1 und π zur Ordnung 2 auf C_4. Also ist C_4 und ebenso C_6 doppelt.

Die Komponenten C_5 und C_7 sind einfach. Denn über $Z_3 \neq 0$ ist $\frac{X_1}{Z_1} = \frac{X_3}{Z_3}\pi$ und $\left(\frac{Y_2}{Z_2} - \alpha\right)\left(\frac{Y_2}{Z_2} - \beta\right) \equiv \frac{Y_3}{Z_3}\pi \bmod \pi$. Da $\left(\frac{Y_2}{Z_2} - \beta\right)$ auf C_5 nicht identisch verschwindet, liegt $\left(\frac{Y_2}{Z_2} - \alpha\right)$ in dem von π erzeugten Ideal des lokalen Ringes $\mathcal{O}_{\mathcal{V}_3,\eta}$ des generischen Punktes η von C_5. In der Gleichung

$$Z_3(Y_3 + a_{1,1}\frac{Y_2}{Z_2}X_3 - a_{4,3}X_3) = \frac{X_1}{Z_1}(X_3^2 + a_{2,2}X_3Z_3)$$

sind diesmal sowoh Z_3 auf der linken Seite, als auch die Klammer auf der rechten Seite Einheiten im lokalen Ring $\mathcal{O}_{\mathcal{V}_3,\eta}$ des generischen Punktes η von C_5. Somit erzeugt π das maximale Ideal von $\mathcal{O}_{\mathcal{V}_3,\eta}$ und verschwindet zur Ordnung 1 auf C_5. Also ist C_5 und ebenso C_7 einfach.

5.10.4 Die singulären Punkte von $\mathcal{V}_3$

Da $\mathbf{A}^2_R \times_{Spec\,R} \mathbf{P}^2_R$ ein reguläres fünfdimensionales Schema ist, wird das maximale Ideal des lokalen Ringes eines jeden abgeschlossenen Punktes von fünf Elementen erzeugt. Somit werden auch auf dem Unterschema $\mathcal{V}_3$ höchstens fünf Elemente zum Erzeugen des maximalen Ideals eines abgeschlossenen Punktes benötigt.

Sei nun $P \in \widetilde{\mathcal{V}}_3$ ein abgeschlossener Punkt und $\mathcal{M}$ das maximale Ideal in $\mathcal{O}_{\mathcal{V}_3,P}$.

<u>Auf $\mathcal{V}_3 - (C_4 \cup C_5 \cup C_6 \cup C_7)$</u> liegen keine singulären Punkte, da $\mathcal{V}_3 - (C_4 \cup C_5 \cup C_6 \cup C_7) \cong \mathcal{V}_2 - A$ und somit regulär ist.

<u>$P \in (C_4 \cup C_6) \cap C_3$:</u>
dann ist $\mathcal{M} = (\frac{X_1}{Z_1}, g(\frac{Y_2}{Z_2}), X_3, Z_3, \pi)$, wobei $G_3 \equiv g(\frac{Y_2}{Z_2}) \cdot h \bmod \pi$ in $R[\frac{Y_2}{Z_2}]$ ist. Es ist $Y_3 \notin \mathcal{M}$. Außerdem ist $h \notin \mathcal{M}$, da sonst wegen der Verschiedenheit der beiden Nullstellen von G_3 auch $1 \in \mathcal{M}$ wäre. Also gilt

$$Z_3 = \frac{X_3}{Y_3}(-a_{1,1}\frac{Y_2}{Z_2}Z_3 + \frac{X_1}{Z_1}X_3 + a_{2,2}\frac{X_1}{Z_1}Z_3 + a_{4,3}Z_3)$$

und damit $\frac{X_1}{Z_1} = \frac{X_3}{Y_3}\left(\left(\frac{Y_2}{Z_2}\right)^2 + a_{3,2}\frac{Y_2}{Z_2} - a_{6,4}\right)$ und $\pi = \frac{Z_3}{Y_3}\left(\left(\frac{Y_2}{Z_2}\right)^2 + a_{3,2}\frac{Y_2}{Z_2} - a_{6,4}\right)$. Das bedeutet $\mathcal{M} = (X_3, g)$ und P ist regulär.

$P \in (C_4 \cup C_6) - C_3$:
dann ist $X_3 \neq 0$ und $\mathcal{M} = (\frac{X_1}{Z_1},\ g(\frac{Y_2}{Z_2}),\ p(X_3, Y_3),\ Z_3,\ \pi)$, wobei $G_3 \equiv g(\frac{Y_2}{Z_2}) \cdot h \bmod \pi$ in $R[\frac{Y_2}{Z_2}]$ ist. Es ist $h \notin \mathcal{M}$, da sonst wegen der Verschiedenheit der beiden Nullstellen von G_3 auch $1 \in \mathcal{M}$ wäre. Also gilt

$$\frac{X_1}{Z_1} = \frac{Z_3}{X_3}\left(\frac{Y_3}{X_3} + a_{1,1}\frac{Y_2}{Z_2} - a_{2,2}\frac{X_1}{Z_1} - a_{4,3}\right)$$

und damit $\pi = \frac{Z_3}{X_3}\frac{X_1}{Z_1}$ und $g \equiv \frac{1}{h}\frac{Y_3}{X_3}\frac{X_1}{Z_1} \bmod \pi$. Das bedeutet $\mathcal{M} = (Z_3, p)$ und P ist regulär.

$P \in (C_5 \cup C_7) - (C_4 \cup C_6)$:
dann ist $Z_3 \neq 0$ und $\mathcal{M} = (\frac{X_1}{Z_1},\ g(\frac{Y_2}{Z_2}),\ Y_3 + (a_{1,1}\frac{Y_2}{Z_2} - a_{4,3})X_3,\ p(X_3, Z_3),\ \pi)$, wobei wieder $G_3 \equiv g(\frac{Y_2}{Z_2}) \cdot h \bmod \pi$ in $R[\frac{Y_2}{Z_2}]$ ist. Es ist $h \notin \mathcal{M}$, da sonst wegen der Verschiedenheit der beiden Nullstellen von G_3 auch $1 \in \mathcal{M}$ wäre. Also gilt $\frac{X_1}{Z_1} = \frac{X_3}{Z_3}\pi$, $g \equiv \frac{1}{h}\frac{Y_3}{Z_3}\pi \bmod \pi$ und

$$Y_3 + (a_{1,1}\frac{Y_2}{Z_2} - a_{4,3})X_3 \;=\; \frac{1}{Z_3}\frac{X_1}{Z_1}(X_3^2 + a_{2,2}X_3Z_3).$$

Das bedeutet $\mathcal{M} = (p, \pi)$ und P ist regulär.

Also ist $\mathcal{V}_3$ regulär und als abgeschlossenes Unterschema eines Produkts von $\mathbf{P}_R^m$ auch eigentlich über R. Man hat den Reduktionstyp IV* und es folgt, daß $\mathcal{V}_3$ minimal ist und $\mathcal{C}$ ergibt sich durch Zusammenkleben von $\mathcal{V}_3$ mit all den weggeschnittenen Teilen. Es ist $m = 7$ und $c = 3$, falls die Nulstellen von G_3 in k liegen und $c = 1$, falls sie nicht in k liegen.

5.11 Beweis von Schritt 9

Zu den Annahmen von Schritt 8 kommt jetzt dazu, daß $G_3 = \left(\frac{Y_2}{Z_2}\right)^2 + a_{3,2}\frac{Y_2}{Z_2} - a_{6,4}$ eine doppelte Nullstelle in $\bar{k}$ hat. Da k perfekt ist, liegt diese in k und besitzt einen Repräsentanten $t \in R$. Sie wird durch die Translation $Y_2 \to Y_2 + tZ_2,\ Z_2 \to Z_2$ auf $\frac{Y_2}{Z_2} = 0$ verschoben. Diese Translation bewirkt auf E/K den Übergang $X \to X,\ Y \to Y + r\pi^2 Z$, $Z \to Z$.

Nach Satz 2.28 wird damit $\pi \mid a_1,\ \pi^2 \mid a_2,\ \pi^3 \mid a_3, a_4,\ \pi^5 \mid a_6$ und

$$F_2 = \frac{Y_1}{Z_1}Y_2 + \pi a_{1,1}\frac{X_1}{Z_1}Y_2 + \pi^2 a_{3,3}Y_2 - \left(\frac{X_1}{Z_1}\right)^3 Z_2 - \pi a_{2,2}\left(\frac{X_1}{Z_1}\right)^2 Z_2 - \pi a_{4,3}\frac{X_1}{Z_1}Z_2 - \pi^2 a_{6,5}Z_2.$$

Wie in Abschnitt 5.8.2 ist $\mathcal{S}(\mathcal{U}_{Z_1}) \cong R[\frac{X_1}{Z_1}, \frac{Y_1}{Z_1}][Y_2, Z_2]/I_{Z_1}$ mit $I_{Z_1} = (Y_2\pi - Z_2\frac{Y_1}{Z_1})$ und das Schema $\mathcal{V}_2$ ist über $Z_1 \neq 0$ durch das Ideal (F_2) in $\mathit{Proj}\ \mathcal{S}(\mathcal{U}_{Z_1})$ gegeben.

Die Komponenten C_2 und C_3 von $\mathcal{V}_2$ haben die Gestalt

$$C_2: \ \frac{Y_1}{Z_1} = Z_2 = \pi = 0 \qquad \text{und} \qquad C_3: \ \frac{X_1}{Z_1} = \frac{Y_1}{Z_1} = \pi = 0.$$

Wie in Abschnitt 5.8.2 gezeigt, hat die Komponente C_1 Vielfachheit eins und die Komponente C_2 Vielfachheit zwei.

5.11.1 Die singulären Punkte von $\mathcal{V}_2$

<u>Auf $\mathcal{V}_2 - A$</u> liegen keine singulären Punkte, wie in Abschnitt 5.10.1 festgestellt wurde.

<u>Auf A</u> liegt nur ein Punkt, nämlich $P = (\frac{X_1}{Z_1}, \frac{Y_1}{Z_1}, Y_2, \pi)$.
Dieser ist singulär, da dort $F_2 \in \mathcal{M}^2$ ist und wird als nächstes aufgeblasen.

Dazu betrachte man wie in Abschnitt 5.11.2 das offene Unterschema von $\mathcal{V}_2$

$$\begin{aligned} P \in \mathcal{V}_2 - (\overline{\{(Z_1)\}} \cup \overline{\{(Z_2)\}}) &= Spec\ R[\frac{X_1}{Z_1}, \frac{Y_1}{Z_1}, \frac{Y_2}{Z_2}]/(\frac{Y_1}{Z_1} - \frac{Y_2}{Z_2}\pi, F_2) \\ &\cong Spec\ R[\frac{X_1}{Z_1}, \frac{Y_2}{Z_2}]/(\frac{1}{Z_2}F_2), \end{aligned}$$

wobei $\frac{1}{Z_2}F_2 = \pi\left(\frac{Y_2}{Z_2}\right)^2 + \pi a_{1,1}\frac{X_1}{Z_1}\frac{Y_2}{Z_2} + \pi^2 a_{3,3}\frac{Y_2}{Z_2} - \left(\frac{X_1}{Z_1}\right)^3 - \pi a_{2,2}\left(\frac{X_1}{Z_1}\right)^2 - \pi a_{4,3}\frac{X_1}{Z_1} - \pi^2 a_{6,5}$ ist.

P ist dort gegeben durch $(\frac{X_1}{Z_1}, \frac{Y_2}{Z_2}, \pi)$.

5.11.2 Aufblasen von $\mathcal{V}_2$ entlang $(\frac{X_1}{Z_1}, \frac{Y_2}{Z_2}, \pi)$

Wir werden dabei nicht benutzen, daß $\pi^4 \not| a_4$ in Schritt 9 gilt. Somit können wir diese Aufblasung auch in Schritt 10 verwenden.

$$\mathcal{I} = (\frac{X_1}{Z_1}, \frac{Y_2}{Z_2}, \pi), \qquad \mathcal{S} = \bigoplus_{d \geq 0} \mathcal{I}^d$$

Man hat die surjektive Abbildung $R[\frac{X_1}{Z_1}, \frac{Y_2}{Z_2}][X_3, Y_3, Z_3] \to \mathcal{S}$ durch die Zuordnung $(X_3, Y_3, Z_3) \mapsto (\frac{X_1}{Z_1}, \frac{Y_2}{Z_2}, \pi)$.

Ihr Kern ist $I_{Z_2} = (Y_3\frac{X_1}{Z_1} - X_3\frac{Y_2}{Z_2},\ X_3\pi - Z_3\frac{X_1}{Z_1},\ Y_3\pi - Z_3\frac{Y_2}{Z_2})$.

Also ergibt sich $\mathcal{S} \cong R[\frac{X_1}{Z_1}, \frac{Y_2}{Z_2}][X_3, Y_3, Z_3]/I_{Z_2}$.

$\phi : Proj\ \mathcal{S} \to \mathbf{A}^2_R$ ist gegeben durch $R[\frac{X_1}{Z_1}, \frac{Y_2}{Z_2}] \to \mathcal{S}$.

Die strikte Transformation von $\mathcal{V}_2$ erhält man gemäß Satz 2.32 als den Abschluß

$\mathcal{V}_3 := \overline{\phi^{-1}(\mathcal{V}_2 - \{(\frac{X_1}{Z_1}, \frac{Y_2}{Z_2}, \pi)\})}$ in **Proj** $\mathcal{S}$.

Dabei ist $\mathcal{V}_3$ durch folgende Gleichungen gegeben:

In $X_3 \neq 0$: $\quad \Rightarrow \quad \frac{Y_2}{Z_2} = \frac{Y_3}{X_3}\frac{X_1}{Z_1}$ und $\pi = \frac{Z_3}{X_3}\frac{X_1}{Z_1}$.

Damit ist $X_3^2 \cdot \frac{F_2}{Z_2} = \left(\frac{X_1}{Z_1}\right)^2(\pi Y_3^2 + \pi a_{1,1}X_3Y_3 + \pi a_{3,3}Y_3Z_3 - \frac{X_1}{Z_1}X_3^2 - \pi a_{2,2}X_3^2 - a_{4,3}X_3Z_3 - a_{6,5}Z_3^2) = 0$.

Falls $\frac{X_1}{Z_1} = 0$, so folgt $\frac{Y_2}{Z_2} = \pi = 0$ und der Punkt ist $\notin \phi^{-1}(\mathcal{V}_2 - \{(\frac{X_1}{Z_1}, \frac{Y_2}{Z_2}, \pi)\})$.
Also bleibt nur

$$F_3 := \pi Y_3^2 + \pi a_{1,1} X_3 Y_3 + \pi a_{3,3} Y_3 Z_3 - \frac{X_1}{Z_1} X_3^2 - \pi a_{2,2} X_3^2 - a_{4,3} X_3 Z_3 - a_{6,5} Z_3^2 = 0.$$

In $Y_3 \neq 0:\quad \Rightarrow\quad \frac{X_1}{Z_1} = \frac{X_3}{Y_3}\frac{Y_2}{Z_2}$ und $\pi = \frac{Z_3}{Y_3}\frac{Y_2}{Z_2}$.

Damit ist $Y_3^2 \cdot \frac{F_2}{Z_2} = \left(\frac{Y_2}{Z_2}\right)^2 (\pi Y_3^2 + \pi a_{1,1} X_3 Y_3 + \pi a_{3,3} Y_3 Z_3 - \frac{X_1}{Z_1} X_3^2 - \pi a_{2,2} X_3^2 - a_{4,3} X_3 Z_3 - a_{6,5} Z_3^2) = 0$.
Falls $\frac{Y_2}{Z_2} = 0$, so folgt $\frac{X_1}{Z_1} = \pi = 0$ und der Punkt ist $\notin \phi^{-1}(\mathcal{V}_2 - \{(\frac{X_1}{Z_1}, \frac{Y_2}{Z_2}, \pi)\})$.
Also bleibt nur $F_3 = 0$.

In $Z_3 \neq 0:\quad \Rightarrow\quad \frac{X_1}{Z_1} = \frac{X_3}{Z_3}\pi$ und $\frac{Y_2}{Z_2} = \frac{Y_3}{Z_3}\pi$.

Damit ist $Z_3^2 \cdot \frac{F_2}{Z_2} = \pi^2(\pi Y_3^2 + \pi a_{1,1} X_3 Y_3 + \pi a_{3,3} Y_3 Z_3 - \frac{X_1}{Z_1} X_3^2 - \pi a_{2,2} X_3^2 - a_{4,3} X_3 Z_3 - a_{6,5} Z_3^2) = 0$.
Falls $\pi = 0$, so folgt $\frac{X_1}{Z_1} = \frac{Y_2}{Z_2} = 0$ und der Punkt ist $\notin \phi^{-1}(\mathcal{V}_2 - \{(\frac{X_1}{Z_1}, \frac{Y_2}{Z_2}, \pi)\})$.
Also bleibt nur $F_3 = 0$.

Man bekommt also $\mathcal{V}_3 \;=\; \mathit{Proj}\;\; R\,[\frac{X_1}{Z_1}, \frac{Y_2}{Z_2}][X_3, Y_3, Z_3]/(I_{Z_2}, F_3)$.

Für die weitere Untersuchung in Schritt 9 sei jetzt $\pi^4 \not| a_4$.

$\widetilde{\mathcal{V}}_3$ besteht aus folgenden Komponenten:

$\pi = 0 \Rightarrow Z_3\frac{X_1}{Z_1} = Z_3\frac{Y_2}{Z_2} = 0$

- $\underline{Z_3 = 0} \Rightarrow$ wegen $F_3 = 0$, daß $\frac{X_1}{Z_1} X_3^2 = 0$ ist. Sei zunächst $\underline{X_3 = 0} \Rightarrow Y_3 \neq 0 \Rightarrow \underline{\frac{X_1}{Z_1} = 0}$. Dies ist die Komponente C_3 von $\mathcal{V}_2$ mit dem Parameter $\frac{Y_2}{Z_2}$. Sei nun
- $\underline{Z_3 = \frac{X_1}{Z_1} = 0} \Rightarrow X_3\frac{Y_2}{Z_2} = 0$. Den Fall $X_3 = 0$ haben wir soeben als Komponente C_3 schon behandelt. Also bleibt noch $\underline{\frac{Y_2}{Z_2} = 0}$. Diese Komponente ist bei der Aufblasung neu hinzugekommen, sie heiße C_4. Ihr Parameter ist $\frac{X_3}{Y_3}$ beziehungsweise $\frac{Y_3}{X_3}$. Jetzt fehlt noch
- $\underline{\frac{X_1}{Z_1} = \frac{Y_2}{Z_2} = 0}$. Wegen $F_3 = 0$ folgt $Z_3(a_{4,3}X_3 + a_{6,5}Z_3) = 0$. Der Fall $Z_3 = 0$ wurde soeben als Komponente C_4 schon behandelt. Also bleibt noch $\underline{a_{4,3}X_3 + a_{6,5}Z_3 = 0}$. Auch diese Komponente ist bei der Aufblasung neu hinzugekommen, sie heiße C_5. Da $\tilde{a}_{4,3} \neq 0$ in k ist, ist ihr Parameter $\frac{Y_3}{Z_3}$ beziehungsweise $\frac{Z_3}{Y_3}$.

Die Komponenten C_3, C_4 und C_5 schneiden sich alle drei in dem Punkt $(\frac{X_1}{Z_1}, \frac{Y_2}{Z_2}, X_3, Z_3, \pi)$. Weitere Schnittpunkte gibt es nicht.

5.11.3 Die singulären Punkte von $\mathcal{V}_3$

Da $\mathbf{A}^2_R \times_{Spec\,R} \mathbf{P}^2_R$ ein reguläres fünfdimensionales Schema ist, wird das maximale Ideal des lokalen Ringes eines jeden abgeschlossenen Punktes von fünf Elementen erzeugt. Somit werden auch auf dem Unterschema $\mathcal{V}_3$ höchstens fünf Elemente zum Erzeugen des maximalen Ideals eines abgeschlossenen Punktes benötigt.

Sei nun $P \in \widetilde{\mathcal{V}}_3$ ein abgeschlossener Punkt und $\mathcal{M}$ das maximale Ideal in $\mathcal{O}_{\mathcal{V}_3,P}$.

Auf $\mathcal{V}_3 - (C_4 \cup C_5)$ liegen keine singulären Punkte, da $\mathcal{V}_3 - (C_4 \cup C_5) \cong \mathcal{V}_2 - \{(\frac{X_1}{Z_1}, \frac{Y_2}{Z_2}, \pi)\}$ und somit regulär ist.

$P \in C_4 - C_3$:
dann ist $\mathcal{M} = (\frac{X_1}{Z_1}, \frac{Y_2}{Z_2}, p(X_3, Y_3), Z_3, \pi)$. Es ist $X_3 \notin \mathcal{M}$, da $P \notin C_3$ ist. Also gilt $\pi = \frac{Z_3}{X_3}\frac{X_1}{Z_1}$,

$$\frac{X_1}{Z_1} = \frac{1}{X_3^2}\left(\pi(Y_3^2 + a_{1,1}X_3Y_3 + a_{3,3}Y_3Z_3 - a_{2,2}X_3^2) - Z_3(a_{4,3}X_3 - a_{6,5}Z_3)\right)$$

und $\frac{Y_2}{Z_2} = \frac{Y_3}{X_3}\frac{X_1}{Z_1}$. Das bedeutet $\mathcal{M} = (p, Z_3)$ und P ist regulär.

$P \in C_5 - C_3$:
dann ist $\mathcal{M} = (\frac{X_1}{Z_1}, \frac{Y_2}{Z_2}, a_{4,3}X_3 + a_{6,5}Z_3, p(Y_3, Z_3), \pi)$. Da $P \notin C_3$ ist, folgt $Z_3 \notin \mathcal{M}$, denn sonst wäre wegen $\tilde{a}_{4,3} \neq 0$ auch $X_3 \in \mathcal{M}$. Also gilt $\frac{X_1}{Z_1} = \frac{X_3}{Z_3}\pi$, $\frac{Y_2}{Z_2} = \frac{Y_3}{Z_3}\pi$ und

$$a_{4,3}X_3 - a_{6,5}Z_3 = \frac{1}{Z_3}\left(\pi(Y_3^2 + a_{1,1}X_3Y_3 + a_{3,3}Y_3Z_3 - a_{2,2}X_3^2) - \frac{X_1}{Z_1}X_3^2\right).$$

Das bedeutet $\mathcal{M} = (p, \pi)$ und P ist regulär.

$P = C_3 \cap C_4 \cap C_5$ ist singulärer Punkt,
denn $\mathcal{M} = (\frac{X_1}{Z_1}, \frac{Y_2}{Z_2}, X_3, Z_3, \pi)$ und die drei Erzeuger von I_{Z_2}, sowie F_3 mod $\mathcal{M}^2$ ergeben

$$\frac{X_1}{Z_1} \equiv 0, \quad 0 \equiv 0, \quad \pi \equiv 0, \quad \text{und} \quad \pi \equiv 0 \mod \mathcal{M}^2.$$

Dies bedeutet, daß $\frac{Y_2}{Z_2}$, X_3, Z_3 mod $\mathcal{M}^2$ in keiner Relation stehen und linear unabhängig über $k = \mathcal{O}_{\mathcal{V}_3,P}/\mathcal{M}$ sind. Also ist P singulär und wird als nächstes aufgeblasen.

Dazu betrachte man das offene Unterschema von $\mathcal{V}_3$

$$\begin{aligned} P \in \mathcal{V}_3 - \overline{\{(Y_3)\}} &= Spec\ R[\frac{X_1}{Z_1}, \frac{Y_2}{Z_2}, \frac{X_3}{Y_3}, \frac{Z_3}{Y_3}]/(\frac{X_1}{Z_1} - \frac{Y_2}{Z_2}\frac{X_3}{Y_3}, \pi - \frac{Y_2}{Z_2}\frac{Z_3}{Y_3}, F_3) \\ &\cong Spec\ R[\frac{Y_2}{Z_2}, \frac{X_3}{Y_3}, \frac{Z_3}{Y_3}]/(\pi - \frac{Y_2}{Z_2}\frac{Z_3}{Y_3}, \frac{1}{Y_3^2}F_3), \end{aligned}$$

wobei $\frac{1}{Y_3^2}F_3 = \frac{Y_2}{Z_2}\frac{Z_3}{Y_3} + \pi a_{1,1}\frac{X_3}{Y_3} + \pi a_{3,3}\frac{Z_3}{Y_3} - \frac{Y_2}{Z_2}\left(\frac{X_3}{Y_3}\right)^3 - \pi a_{2,2}\left(\frac{X_3}{Y_3}\right)^2 - a_{4,3}\frac{X_3}{Y_3}\frac{Z_3}{Y_3} - a_{6,5}\left(\frac{Z_3}{Y_3}\right)^2$ ist.

P ist dort gegeben durch $(\frac{Y_2}{Z_2}, \frac{X_3}{Y_3}, \frac{Z_3}{Y_3}, \pi)$.

5.11.4 Aufblasen von $\mathcal{V}_3$ entlang $(\frac{Y_2}{Z_2}, \frac{X_3}{Y_3}, \frac{Z_3}{Y_3}, \pi)$

Auch bei dieser Aufblasung werden wir nicht benutzen, daß in Schritt 9 gilt $\pi^4 \not| a_4$. Somit können wir auch sie in Schritt 10 nocheinmal verwenden.

$$\mathcal{I} = (\pi, \frac{X_3}{Y_3}, \frac{Y_2}{Z_2}, \frac{Z_3}{Y_3}), \qquad \mathcal{S} = \bigoplus_{d \geq 0} \mathcal{I}^d$$

Man hat die surjektive Abbildung $R\,[\frac{Y_2}{Z_2}, \frac{X_3}{Y_3}, \frac{Z_3}{Y_3}][W_4, X_4, Y_4, Z_4] \to \mathcal{S}$ durch die Zuordnung $(W_4, X_4, Y_4, Z_4) \mapsto (\pi, \frac{X_3}{Y_3}, \frac{Y_2}{Z_2}, \frac{Z_3}{Y_3})$.

Ihr Kern ist $I^*_{Y_3} = (W_4\frac{X_3}{Y_3} - X_4\pi,\ W_4\frac{Y_2}{Z_2} - Y_4\pi,\ W_4\frac{Z_3}{Y_3} - Z_4\pi,\ X_4\frac{Y_2}{Z_2} - Y_4\frac{X_3}{Y_3},$
$X_4\frac{Z_3}{Y_3} - Z_4\frac{X_3}{Y_3},\ Y_4\frac{Z_3}{Y_3} - Z_4\frac{Y_2}{Z_2})$.

Also ergibt sich $\mathcal{S} \cong R\,[\frac{Y_2}{Z_2}, \frac{X_3}{Y_3}, \frac{Z_3}{Y_3}][W_4, X_4, Y_4, Z_4]/I^*_{Y_3}$.

$\phi : Proj\ \mathcal{S} \to \mathbf{A}^3_R$ ist gegeben durch $R\,[\frac{Y_2}{Z_2}, \frac{X_3}{Y_3}, \frac{Z_3}{Y_3}] \to \mathcal{S}$.

Die strikte Transformation von $\mathcal{V}_3$ erhält man gemäß Satz 2.32 als den Abschluß

$\mathcal{V}_4 := \overline{\phi^{-1}(\mathcal{V}_3 - \{(\frac{Y_2}{Z_2}, \frac{X_3}{Y_3}, \frac{Z_3}{Y_3}, \pi)\})}$ in **Proj** $\mathcal{S}$.

Dabei ist $\mathcal{V}_4$ durch folgende Gleichungen gegeben:

In $W_4 \neq 0$: $\quad \Rightarrow \quad \frac{X_3}{Y_3} = \frac{X_4}{W_4}\pi,\ \frac{Y_2}{Z_2} = \frac{Y_4}{W_4}\pi$ und $\frac{Z_3}{Y_3} = \frac{Z_4}{W_4}\pi$.

Damit ist $W_4 \cdot (\pi - \frac{Y_2}{Z_2}\frac{Z_3}{Y_3}) = \pi(W_4 - Y_4\frac{Z_3}{Y_3}) = 0$ und

$$\begin{aligned} W_4^2 \cdot \frac{F_3}{Y_3^2} &= \pi^2(Y_4Z_4 + a_{1,1}W_4X_4 + a_{3,3}W_4Z_4 - \\ &\quad - \left(\frac{X_3}{Y_3}\right)^2 X_4Y_4 - \pi a_{2,2}X_4^2 - a_{4,3}X_4Z_4 - a_{6,5}Z_4^2) = 0. \end{aligned}$$

Falls $\pi = 0$, so folgt $\frac{Y_2}{Z_2} = \frac{X_3}{Y_3} = \frac{Z_3}{Y_3} = 0$ und der Punkt gehört nicht zu $\phi^{-1}(\mathcal{V}_3 - \{(\frac{Y_2}{Z_2}, \frac{X_3}{Y_3}, \frac{Z_3}{Y_3}, \pi)\})$.

Also bleibt nur $W_4 = Y_4\frac{Z_3}{Y_3}$ und

$$\begin{aligned} F_4^* &:= Y_4Z_4 + a_{1,1}W_4X_4 + a_{3,3}W_4Z_4 - \\ &\quad - \left(\frac{X_3}{Y_3}\right)^2 X_4Y_4 - \pi a_{2,2}X_4^2 - a_{4,3}X_4Z_4 - a_{6,5}Z_4^2 = 0. \end{aligned}$$

In $X_4 \neq 0$: $\quad \Rightarrow \quad \pi = \frac{W_4}{X_4}\frac{X_3}{Y_3},\ \frac{Y_2}{Z_2} = \frac{Y_4}{X_4}\frac{X_3}{Y_3}$ und $\frac{Z_3}{Y_3} = \frac{Z_4}{X_4}\frac{X_3}{Y_3}$.

Damit ist $X_4 \cdot (\pi - \frac{Y_2}{Z_2}\frac{Z_3}{Y_3}) = \frac{X_3}{Y_3}(W_4 - Y_4\frac{Z_3}{Y_3}) = 0$ und

$$\begin{aligned} X_4^2 \cdot \frac{F_3}{Y_3^2} &= \left(\frac{X_3}{Y_3}\right)^2 (Y_4Z_4 + a_{1,1}W_4X_4 + a_{3,3}W_4Z_4 - \\ &\quad - \left(\frac{X_3}{Y_3}\right)^2 X_4Y_4 - \pi a_{2,2}X_4^2 - a_{4,3}X_4Z_4 - a_{6,5}Z_4^2) = 0. \end{aligned}$$

Falls $\frac{X_3}{Y_3} = 0$, so folgt $\frac{Y_2}{Z_2} = \frac{Z_3}{Y_3} = \pi = 0$ und der Punkt gehört nicht zu $\phi^{-1}(\mathcal{V}_3 - \{(\frac{Y_2}{Z_2}, \frac{X_3}{Y_3}, \frac{Z_3}{Y_3}, \pi)\})$.

Also bleibt nur $W_4 = Y_4\frac{Z_3}{Y_3}$ und $F_4^* = 0$.

In $Y_4 \neq 0$: $\quad\Rightarrow\quad \pi = \frac{W_4}{Y_4}\frac{Y_2}{Z_2}$, $\frac{X_3}{Y_3} = \frac{X_4}{Y_4}\frac{Y_2}{Z_2}$ und $\frac{Z_3}{Y_3} = \frac{Z_4}{Y_4}\frac{Y_2}{Z_2}$.

Damit ist $Y_4 \cdot (\pi - \frac{Y_2}{Z_2}\frac{Z_3}{Y_3}) = \frac{Y_2}{Z_2}(W_4 - Y_4\frac{Z_3}{Y_3}) = 0$ und

$$\begin{aligned} Y_4^2 \cdot \frac{F_3}{Y_3^2} &= \left(\frac{Y_2}{Z_2}\right)^2 (Y_4Z_4 + a_{1,1}W_4X_4 + a_{3,3}W_4Z_4 - \\ &\qquad - \left(\frac{X_3}{Y_3}\right)^2 X_4Y_4 - \pi a_{2,2}X_4^2 - a_{4,3}X_4Z_4 - a_{6,5}Z_4^2) = 0. \end{aligned}$$

Falls $\frac{Y_2}{Z_2} = 0$, so folgt $\frac{X_3}{Y_3} = \frac{Z_3}{Y_3} = \pi = 0$ und der Punkt gehört nicht zu $\phi^{-1}(\mathcal{V}_3 - \{(\frac{Y_2}{Z_2}, \frac{X_3}{Y_3}, \frac{Z_3}{Y_3}, \pi)\})$.

Also bleibt nur $W_4 = Y_4\frac{Z_3}{Y_3}$ und $F_4^* = 0$.

In $Z_4 \neq 0$: $\quad\Rightarrow\quad \pi = \frac{W_4}{Z_4}\frac{Z_3}{Y_3}$, $\frac{X_3}{Y_3} = \frac{X_4}{Z_4}\frac{Z_3}{Y_3}$ und $\frac{Y_2}{Z_2} = \frac{Y_4}{Z_4}\frac{Z_3}{Y_3}$.

Damit ist $Z_4 \cdot (\pi - \frac{Y_2}{Z_2}\frac{Z_3}{Y_3}) = \frac{Z_3}{Y_3}(W_4 - Y_4\frac{Z_3}{Y_3}) = 0$ und

$$\begin{aligned} Z_4^2 \cdot \frac{F_3}{Y_3^2} &= \left(\frac{Z_3}{Y_3}\right)^2 (Y_4Z_4 + a_{1,1}W_4X_4 + a_{3,3}W_4Z_4 - \\ &\qquad - \left(\frac{X_3}{Y_3}\right)^3 X_4Y_4 - \pi a_{2,2}X_4^2 - a_{4,3}X_4Z_4 - a_{6,5}Z_4^2) = 0. \end{aligned}$$

Falls $\frac{Z_3}{Y_3} = 0$, so folgt $\frac{Y_2}{Z_2} = \frac{X_3}{Y_3} = \pi = 0$ und der Punkt gehört nicht zu $\phi^{-1}(\mathcal{V}_3 - \{(\frac{Y_2}{Z_2}, \frac{X_3}{Y_3}, \frac{Z_3}{Y_3}, \pi)\})$.

Also bleibt nur $W_4 = Y_4\frac{Z_3}{Y_3}$ und $F_4^* = 0$.

Man bekommt $\mathcal{V}_4$ durch das Ideal $(W_4 - Y_4\frac{Z_3}{Y_3}, F_4^*)$ in **Proj** $\mathcal{S}$. Dabei gilt

$$\begin{aligned} X_4\pi - W_4\frac{X_3}{Y_3} &= X_4\pi - Y_4\frac{X_3}{Y_3}\frac{Z_3}{Y_3} &&= X_4\left(\pi - \frac{Y_2}{Z_2}\frac{Z_3}{Y_3}\right), \\ Y_4\pi - W_4\frac{Y_2}{Z_2} &= &&= Y_4\left(\pi - \frac{Y_2}{Z_2}\frac{Z_3}{Y_3}\right), \\ Z_4\pi - W_4\frac{Z_3}{Y_3} &= Z_4\pi - Y_4\left(\frac{Z_3}{Y_3}\right)^2 &&= Z_4\left(\pi - \frac{Y_2}{Z_2}\frac{Z_3}{Y_3}\right). \end{aligned}$$

Da mit $Y_4 = 0$ auch $W_4 = 0$ ist, aber nicht $W_4 = X_4 = Y_4 = Z_4 = 0$ sein kann, folgt daraus, daß $\pi - \frac{Y_2}{Z_2}\frac{Z_3}{Y_3} = 0$ ist. Somit ist $\mathcal{V}_4$ isomorph zu

$$Proj\ \ R[\frac{Y_2}{Z_2}, \frac{X_3}{Y_3}, \frac{Z_3}{Y_3}][X_4, Y_4, Z_4]/(I_{Y_3}, \pi - \frac{Y_2}{Z_2}\frac{Z_3}{Y_3}, F_4), \text{ wobei}$$

$$I_{Y_3} = (X_4\frac{Y_2}{Z_2} - Y_4\frac{X_3}{Y_3},\ \ X_4\frac{Z_3}{Y_3} - Z_4\frac{X_3}{Y_3},\ \ Y_4\frac{Z_3}{Y_3} - Z_4\frac{Y_2}{Z_2}) \quad \text{und}$$

$$F_4 := Y_4Z_4 + a_{1,1}\frac{Z_3}{Y_3}X_4Y_4 + a_{3,3}\frac{Z_3}{Y_3}Y_4Z_4 - \left(\frac{X_3}{Y_3}\right)^2 X_4Y_4 - \pi a_{2,2}X_4^2 - a_{4,3}X_4Z_4 - a_{6,5}Z_4^2.$$

$\widetilde{\mathcal{V}}_4$ besteht aus folgenden Komponenten:

$\pi = 0 \Rightarrow \frac{Y_2}{Z_2}\frac{Z_3}{Y_3} = 0$

- $\underline{\frac{Y_2}{Z_2} = 0} \Rightarrow Y_4\frac{X_3}{Y_3} = Y_4\frac{Z_3}{Y_3} = 0$. Sei zunächst $\underline{Y_4 = 0}$. Daraus folgt wegen $F_4 = 0$, daß $(a_{4,3}X_4 + a_{6,5}Z_4)Z_4 = 0$ ist. Zuerst sei

  * $\underline{Z_4 = 0} \Rightarrow X_4 \neq 0 \Rightarrow \underline{\frac{Z_3}{Y_3}} = 0$. Dies ist die Komponente C_4 von $\mathcal{V}_3$ mit dem Parameter $\frac{X_3}{Y_3}$. Sei nun
  * $\underline{a_{4,3}X_4 + a_{6,5}Z_4 = 0} \Rightarrow Z_4 \neq 0$, da sonst wegen $\tilde{a}_{4,3} \neq 0$ auch $X_4 = 0$ wäre. Somit folgt noch $\underline{\frac{X_3}{Y_3} = \frac{X_4}{Z_4}\frac{Z_3}{Y_3}}$. Dies ist die Komponente C_5 von $\mathcal{V}_3$ mit dem Parameter $\frac{Z_3}{Y_3}$. Es fehlt noch

- $\underline{\frac{Y_2}{Z_2} = \frac{X_3}{Y_3} = \frac{Z_3}{Y_3} = 0}$. Daraus folgt wegen $F_4 = 0$, daß $(Y_4 - a_{4,3}X_4 - a_{6,5}Z_4)Z_4 = 0$ ist. Zuerst sei

  * $\underline{Z_4 = 0}$. Diese Komponente ist bei der Aufblasung neu hinzugekommen, sie heiße C_6. Ihr Parameter ist $\frac{X_4}{Y_4}$ beziehungsweise $\frac{Y_4}{X_4}$.
  * $\underline{Y_4 - a_{4,3}X_4 - a_{6,5}Z_4 = 0}$. Auch diese Komponente ist bei der Aufblasung neu hinzugekommen, sie heiße C_7. Ihr Parameter ist $\frac{X_4}{Z_4}$ beziehungsweise $\frac{Z_4}{X_4}$. Sei jetzt

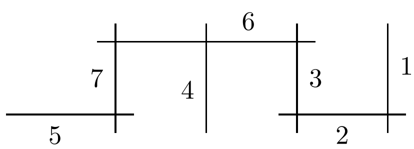
- $\underline{\frac{Z_3}{Y_3} = 0} \Rightarrow Z_4\frac{Y_2}{Z_2} = Z_4\frac{X_3}{Y_3} = 0$. Der Fall $\frac{Y_2}{Z_2} = \frac{Z_3}{Y_3} = 0$ wurde soeben als Komponenten C_6 und C_7 schon behandelt. Deshalb sei jetzt $\underline{Z_4 = 0}$. Wegen $F_4 = 0$ folgt daraus, daß $\left(\frac{X_3}{Y_3}\right)^2 X_4Y_4 = 0$ ist. Sei zunächst $\underline{\frac{X_3}{Y_3} = 0} \Rightarrow X_4\frac{Y_2}{Z_2} = 0$.

  * $\underline{X_4 = 0}$. Dies ist die Komponente C_3 von $\mathcal{V}_3$ mit dem Parameter $\frac{Y_2}{Z_2}$.
  * $\underline{\frac{Y_2}{Z_2} = 0}$. Dieser Komponente haben wir soeben den Namen C_6 gegeben. Ihr Parameter ist $\frac{X_4}{Y_4}$ beziehungsweise $\frac{Y_4}{X_4}$. Schließlich fehlen noch

- $\underline{\frac{Z_3}{Y_3} = Z_4 = X_4 = 0} \Rightarrow Y_4 \neq 0 \Rightarrow \underline{\frac{X_3}{Y_3} = 0}$. Dies ist wieder die Komponente C_3.

- $\underline{\frac{Z_3}{Y_3} = Z_4 = Y_4 = 0} \Rightarrow X_4 \neq 0 \Rightarrow \underline{\frac{Y_2}{Z_2} = 0}$. Dies ist wieder die Komponente C_4.

Diese Komponenten sind wie folgt angeordnet:



Die kleinen Zahlen geben dabei die Nummern der Komponenten an.

Die Komponenten haben folgende Vielfachheiten:

C_3 ist dreifach. Denn $\pi = \frac{Y_2}{Z_2}\frac{Z_3}{Y_3}$, $X_4\frac{Y_2}{Z_2} = Y_4\frac{X_3}{Y_3}$, $Y_4\frac{Z_3}{Y_3} = Z_4\frac{Y_2}{Z_2}$ und da $Y_4 \neq 0$ ist und $\frac{Y_2}{Z_2}$ auf C_3 nicht identisch verschwindet, gilt $\pi \sim \frac{Z_3}{Y_3} \sim Z_4$ und $\frac{X_3}{Y_3} \sim X_4$ im lokalen Ring $\mathcal{O}_{\mathcal{V}_4,\eta}$ des generischen Punktes η von C_3. In F_4 eingesetzt erhält man

$$Z_4(Y_4 + a_{1,1}\frac{Y_2}{Z_2}X_4 + a_{3,3}\frac{Z_3}{Y_3}Y_4 - a_{2,2}\frac{Y_2}{Z_2}\frac{X_3}{Y_3}X_4 - a_{4,3}X_4 - a_{6,5}Z_4) \;=\; Y_4\left(\frac{X_3}{Y_3}\right)^2 X_4.$$

Der Term in Klammern auf der linken Seite und Y_4 auf der rechten Seite der Gleichung sind auf C_3 ungleich Null und somit Einheiten in $\mathcal{O}_{\mathcal{V}_4,\eta}$. Wegen $\frac{X_3}{Y_3} \sim X_4$ sind also $\frac{X_3}{Y_3}$ und X_4 beides Erzeugende des maximalen Ideals von $\mathcal{O}_{\mathcal{V}_4,\eta}$ und sie verschwinden zur Ordnung 1 auf C_3. Somit ist die Ordnung von Z_4 und damit die von π auf C_3 gleich 3. Dies bedeutet, daß C_3 dreifach ist.

C_4 ist doppelt. Denn $\pi = \frac{Y_2}{Z_2}\frac{Z_3}{Y_3}$, $X_4\frac{Y_2}{Z_2} = Y_4\frac{X_3}{Y_3}$, $X_4\frac{Z_3}{Y_3} = Z_4\frac{X_3}{Y_3}$ und da $X_4 \neq 0$ ist und $\frac{X_3}{Y_3}$ auf C_4 nicht identisch verschwindet, gilt $\frac{Z_3}{Y_3} \sim Z_4$ und $\frac{Y_2}{Z_2} \sim Y_4$ im lokalen Ring $\mathcal{O}_{\mathcal{V}_4,\eta}$ des generischen Punktes η von C_4. In F_4 eingesetzt erhält man

$$Z_4(Y_4 - a_{4,3}X_4 - a_{6,5}Z_4) \;=\; Y_4\Big(\left(\frac{X_3}{Y_3}\right)^2 X_4 + a_{2,2}\frac{X_3}{Y_3}\frac{Z_3}{Y_3}X_4 - a_{1,1}\frac{Z_3}{Y_3}X_4 - a_{3,3}\frac{Z_3}{Y_3}Z_4\Big).$$

Die Terme in Klammern auf beiden Seiten der Gleichung verschwinden nicht identisch auf C_4 und sind somit Einheiten in $\mathcal{O}_{\mathcal{V}_4,\eta}$. Also sind $\frac{Y_2}{Z_2}$ und $\frac{Z_3}{Y_3}$ beides Erzeugende des maximalen Ideals von $\mathcal{O}_{\mathcal{V}_4,\eta}$ und sie verschwinden zur Ordnung 1 auf C_4. Somit ist die Ordnung von π auf C_4 gleich 2. Dies bedeutet, daß C_4 doppelt ist.

C_5 ist einfach. Denn $\pi = \frac{Y_2}{Z_2}\frac{Z_3}{Y_3}$, $Y_4\frac{Z_3}{Y_3} = Z_4\frac{Y_2}{Z_2}$ und da $Z_4 \neq 0$ ist und $\frac{Z_3}{Y_3}$ auf C_5 nicht identisch verschwindet, gilt $\pi \sim \frac{Y_2}{Z_2} \sim Y_4$ im lokalen Ring $\mathcal{O}_{\mathcal{V}_4,\eta}$ des generischen Punktes η von C_5. In F_4 eingesetzt erhält man

$$Y_4\Big(Z_4 + a_{1,1}\frac{Z_3}{Y_3}X_4 + a_{3,3}\frac{Z_3}{Y_3}Z_4 - \left(\frac{X_3}{Y_3}\right)^2 X_4 - a_{2,2}\frac{X_3}{Y_3}\frac{Z_3}{Y_3}X_4\Big) \;=\; Z_4(a_{4,3}X_4 + a_{6,5}Z_4).$$

Der Term in Klammern auf der linken Seite und Z_4 auf der rechten Seite der Gleichung verschwinden nicht identisch auf C_5 und sind somit Einheiten in $\mathcal{O}_{\mathcal{V}_4,\eta}$. Da auf ganz $\mathcal{V}_4$ gilt $X_4\frac{Z_3}{Y_3} - Z_4\frac{X_3}{Y_3} = 0$, ist π Erzeugende des maximalen Ideals von $\mathcal{O}_{\mathcal{V}_4,\eta}$ und verschwindet zur Ordnung 1 auf C_5. Dies bedeutet, daß C_5 einfach ist.

5.11.5 Die singulären Punkte von $\mathcal{V}_4$

Da $\mathbf{A}^3_R \times_{Spec\, R} \mathbf{P}^2_R$ ein reguläres sechsdimensionales Schema ist, wird das maximale Ideal des lokalen Ringes eines jeden abgeschlossenen Punktes von sechs Elementen erzeugt. Somit werden auch auf dem Unterschema $\mathcal{V}_4$ höchstens sechs Elemente zum Erzeugen des maximalen Ideals eines abgeschlossenen Punktes benötigt.

Sei nun $P \in \widetilde{\mathcal{V}}_4$ ein abgeschlossener Punkt und $\mathcal{M}$ das maximale Ideal in $\mathcal{O}_{\mathcal{V}_4,P}$.

$\underline{\text{Auf } \mathcal{V}_4 - (C_6 \cup C_7)}$ liegen keine singulären Punkte,
da $\mathcal{V}_4 - (C_6 \cup C_7) \cong \mathcal{V}_3 - \{(\frac{Y_2}{Z_2}, \frac{X_3}{Y_3}, \frac{Z_3}{Y_3}, \pi)\}$ und somit regulär ist.

$\underline{P = C_6 \cap C_3:}$
dann ist $\mathcal{M} = (\frac{Y_2}{Z_2}, \frac{X_3}{Y_3}, \frac{Z_3}{Y_3}, X_4, Z_4, \pi)$. Somit sind Y_4, $Y_4 - a_{4,3}X_4 - a_{6,5}Z_4 \notin \mathcal{M}$ und es gilt $\pi = \frac{Y_2}{Z_2}\frac{Z_3}{Y_3}$, $\frac{X_3}{Y_3} = \frac{X_4}{Y_4}\frac{Y_2}{Z_2}$, $\frac{Z_3}{Y_3} = \frac{Z_4}{Y_4}\frac{Y_2}{Z_2}$ und

$$Z_4 \;=\; \frac{1}{Y_4 - a_{4,3}X_4 - a_{6,5}Z_4}\Big(\Big(\frac{X_3}{Y_3}\Big)^2 X_4Y_4 + \pi a_{2,2}X_4^2 - a_{1,1}\frac{Z_3}{Y_3}X_4Y_4 - a_{3,3}\frac{Z_3}{Y_3}Y_4Z_4\Big).$$

Das bedeutet $\mathcal{M} = (\frac{Y_2}{Z_2}, X_4)$ und P ist regulär.

$\underline{P \in C_6 - (C_3 \cup C_7):}$
dann ist $X_4 \neq 0$, $Y_4 - a_{4,3}X_4 - a_{6,5}Z_4 \neq 0$ und $\mathcal{M} = (\frac{Y_2}{Z_2}, \frac{X_3}{Y_3}, \frac{Z_3}{Y_3}, p(X_4, Y_4), Z_4, \pi)$. Es gilt $\pi = \frac{Y_2}{Z_2}\frac{Z_3}{Y_3}$, $\frac{Y_2}{Z_2} = \frac{Y_4}{X_4}\frac{X_3}{Y_3}$, $\frac{Z_3}{Y_3} = \frac{Z_4}{X_4}\frac{X_3}{Y_3}$ und

$$Z_4 \;=\; \frac{1}{Y_4 - a_{4,3}X_4 - a_{6,5}Z_4}\Big(\Big(\frac{X_3}{Y_3}\Big)^2 X_4Y_4 + \pi a_{2,2}X_4^2 - a_{1,1}\frac{Z_3}{Y_3}X_4Y_4 - a_{3,3}\frac{Z_3}{Y_3}Y_4Z_4\Big).$$

Das bedeutet $\mathcal{M} = (\frac{X_3}{Y_3}, p)$ und P ist regulär.

$\underline{P \in C_7 - C_6:}$
dann ist $Z_4 \neq 0$ und $\mathcal{M} = (\frac{Y_2}{Z_2}, \frac{X_3}{Y_3}, \frac{Z_3}{Y_3}, Y_4 - a_{4,3}X_4 - a_{6,5}Z_4, p(X_4, Z_4), \pi)$. Es gilt $\pi = \frac{Y_2}{Z_2}\frac{Z_3}{Y_3}$, $\frac{X_3}{Y_3} = \frac{X_4}{Z_4}\frac{Z_3}{Y_3}$, $\frac{Y_2}{Z_2} = \frac{Y_4}{Z_4}\frac{Z_3}{Y_3}$ und

$$Y_4 - a_{4,3}X_4 - a_{6,5}Z_4 \;=\; \frac{1}{Z_4}\Big(\Big(\frac{X_3}{Y_3}\Big)^2 X_4Y_4 + \pi a_{2,2}X_4^2 - a_{1,1}\frac{Z_3}{Y_3}X_4Y_4 - a_{3,3}\frac{Z_3}{Y_3}Y_4Z_4\Big).$$

Das bedeutet $\mathcal{M} = (\frac{Z_3}{Y_3}, p)$ und P ist regulär.

$\underline{\text{Der Punkt } P = C_6 \cap C_7}$ ist singulär,
denn dort ist $\mathcal{M} = (\frac{Y_2}{Z_2}, \frac{X_3}{Y_3}, \frac{Z_3}{Y_3}, Y_4 - a_{4,3}X_4, Z_4, \pi)$ und deshalb $X_4 \notin \mathcal{M}$. Die drei Erzeuger von I_{Y_3}, sowie $\pi - \frac{Y_2}{Z_2}\frac{Z_3}{Y_3}$ und F_4 mod $\mathcal{M}^2$ ergeben

$$\frac{Y_2}{Z_2} \equiv a_{4,3}\frac{X_3}{Y_3}, \quad \frac{Z_3}{Y_3} \equiv 0, \quad Y_4\frac{Z_3}{Y_3} \equiv 0, \quad \pi \equiv 0, \quad \text{und} \quad a_{1,1}\frac{Z_3}{Y_3}Y_4 \equiv \pi a_{2,2}X_4 \mod \mathcal{M}^2.$$

Dies bedeutet, daß $\frac{X_3}{Y_3}$, $Y_4 - a_{4,3}X_4$, Z_4 mod $\mathcal{M}^2$ in keiner Relation stehen und linear unabhängig über $k = \mathcal{O}_{\mathcal{V}_4,P}/\mathcal{M}$ sind. Also ist P singulär und wird als nächstes aufgeblasen.

Dazu betrachte man das offene Unterschema von $\mathcal{V}_4$

$$\begin{aligned} P \in \mathcal{V}_4 - \overline{\{(X_4)\}} &= Spec\ R[\frac{Y_2}{Z_2}, \frac{X_3}{Y_3}, \frac{Z_3}{Y_3}, \frac{Y_4}{X_4}, \frac{Z_4}{X_4}]/(I_{Y_3}, \pi - \frac{Y_2}{Z_2}\frac{Z_3}{Y_3}, F_4) \\ &\cong Spec\ R[\frac{X_3}{Y_3}, \frac{Y_4}{X_4}, \frac{Z_4}{X_4}]/(\pi - \Big(\frac{X_3}{Y_3}\Big)^2\frac{Y_4}{X_4}\frac{Z_4}{X_4}, \frac{1}{X_4^2}F_4), \end{aligned}$$

wobei $\frac{1}{X_4^2}F_4 = (\frac{Y_4}{X_4} - a_{4,3})\frac{Z_4}{X_4} + a_{1,1}\frac{X_3}{Y_3}\frac{Y_4}{X_4}\frac{Z_4}{X_4} + a_{3,3}\frac{X_3}{Y_3}\frac{Y_4}{X_4}\left(\frac{Z_4}{X_4}\right)^2 - \left(\frac{X_3}{Y_3}\right)^2\frac{Y_4}{X_4} - a_{2,2}\left(\frac{X_3}{Y_3}\right)^2\frac{Y_4}{X_4}\frac{Z_4}{X_4} - a_{6,5}\left(\frac{Z_4}{X_4}\right)^2$ ist.

P ist dort gegeben durch $(\frac{X_3}{Y_3}, \frac{Y_4}{X_4} - a_{4,3}, \frac{Z_4}{X_4}, \pi)$.

5.11.6 Aufblasen von $\mathcal{V}_4$ entlang $(\frac{X_3}{Y_3},\ \frac{Y_4}{X_4} - a_{4,3},\ \frac{Z_4}{X_4},\ \pi)$

$$\mathcal{I} = (\pi,\ \frac{X_3}{Y_3},\ \frac{Y_4}{X_4} - a_{4,3},\ \frac{Z_4}{X_4}), \qquad \mathcal{S} = \bigoplus_{d\geq 0} \mathcal{I}^d$$

Man hat die surjektive Abbildung $R\,[\frac{X_3}{Y_3}, \frac{Y_4}{X_4}, \frac{Z_4}{X_4}][W_5, X_5, Y_5, Z_5] \to \mathcal{S}$ durch die Zuordnung $(W_5, X_5, Y_5, Z_5) \mapsto (\pi,\ \frac{X_3}{Y_3},\ \frac{Y_4}{X_4} - a_{4,3},\ \frac{Z_4}{X_4})$.

Ihr Kern ist $I^*_{Y_4} = (\,W_5\frac{X_3}{Y_3} - X_5\pi,\ \ W_5\left(\frac{Y_4}{X_4} - a_{4,3}\right) - Y_5\pi,\ \ W_5\frac{Z_4}{X_4} - Z_5\pi,$
$X_5\left(\frac{Y_4}{X_4} - a_{4,3}\right) - Y_5\frac{X_3}{Y_3},\ \ X_5\frac{Z_4}{X_4} - Z_5\frac{X_3}{Y_3},\ \ Y_5\frac{Z_4}{X_4} - Z_5\left(\frac{Y_4}{X_4} - a_{4,3}\right)\,)$.

Also ergibt sich $\mathcal{S} \cong R\,[\frac{X_3}{Y_3}, \frac{Y_4}{X_4}, \frac{Z_4}{X_4}][W_5, X_5, Y_5, Z_5]/I^*_{Y_4}$.

$\phi : Proj\ \ \mathcal{S} \to \mathbf{A}^3_R$ ist gegeben durch $R\,[\frac{X_3}{Y_3}, \frac{Y_4}{X_4}, \frac{Z_4}{X_4}] \to \mathcal{S}$.

Die strikte Transformation von $\mathcal{V}_4$ erhält man gemäß Satz 2.32 als den Abschluß $\mathcal{V}_5 := \overline{\phi^{-1}(\mathcal{V}_4 - \{(\frac{X_3}{Y_3},\ \frac{Y_4}{X_4} - a_{4,3},\ \frac{Z_4}{X_4},\ \pi)\})}$ in **Proj** $\mathcal{S}$.

Dabei ist $\mathcal{V}_5$ durch folgende Gleichungen gegeben:

In $W_5 \neq 0:$ $\quad\Rightarrow\quad$ $\frac{X_3}{Y_3} = \frac{X_5}{W_5}\pi,\ \ \frac{Y_4}{X_4} - a_{4,3} = \frac{Y_5}{W_5}\pi$ und $\frac{Z_4}{X_4} = \frac{Z_5}{W_5}\pi$.

Damit ist $W_5 \cdot (\pi - \left(\frac{X_3}{Y_3}\right)^2\frac{Y_4}{X_4}\frac{Z_4}{X_4}) = \pi(W_5 - \left(\frac{X_3}{Y_3}\right)^2\frac{Y_4}{X_4}Z_5) = 0$ und

$$\begin{aligned} W_5^2 \cdot \frac{F_4}{X_4^2} \quad &= \quad \pi^2(Y_5Z_5 + a_{1,1}\frac{Y_4}{X_4}X_5Z_5 + a_{3,3}\frac{Y_4}{X_4}\frac{Z_4}{X_4}X_5Z_5 - \\ &\quad - \frac{Y_4}{X_4}X_5^2 - a_{2,2}\frac{Y_4}{X_4}\frac{Z_4}{X_4}X_5^2 - a_{6,5}Z_5^2) = 0. \end{aligned}$$

Falls $\pi = 0$, so folgt $\frac{X_3}{Y_3} = \frac{Y_4}{X_4} - a_{4,3} = \frac{Z_4}{X_4} = 0$ und der Punkt liegt nicht in $\phi^{-1}(\mathcal{V}_4 - \{(\frac{X_3}{Y_3},\ \frac{Y_4}{X_4} - a_{4,3},\ \frac{Z_4}{X_4},\ \pi)\})$.

Also bleibt nur $W_5 = \left(\frac{X_3}{Y_3}\right)^2\frac{Y_4}{X_4}Z_5$ und

$$\begin{aligned} F_5^* \quad := \quad & Y_5Z_5 + a_{1,1}\frac{Y_4}{X_4}X_5Z_5 + a_{3,3}\frac{Y_4}{X_4}\frac{Z_4}{X_4}X_5Z_5 - \\ & - \frac{Y_4}{X_4}X_5^2 - a_{2,2}\frac{Y_4}{X_4}\frac{Z_4}{X_4}X_5^2 - a_{6,5}Z_5^2 \quad = \quad 0. \end{aligned}$$

In $X_5 \neq 0:$ $\quad\Rightarrow\quad$ $\pi = \frac{W_5}{X_5}\frac{X_3}{Y_3},\ \ \frac{Y_4}{X_4} - a_{4,3} = \frac{Y_5}{X_5}\frac{X_3}{Y_3}$ und $\frac{Z_4}{X_4} = \frac{Z_5}{X_5}\frac{X_3}{Y_3}$.

Damit ist $X_5 \cdot (\pi - \left(\frac{X_3}{Y_3}\right)^2\frac{Y_4}{X_4}\frac{Z_4}{X_4}) = \frac{X_3}{Y_3}(W_5 - \left(\frac{X_3}{Y_3}\right)^2\frac{Y_4}{X_4}Z_5) = 0$ und

$$\begin{aligned} X_5^2 \cdot \frac{F_4}{X_4^2} \quad &= \quad \left(\frac{X_3}{Y_3}\right)^2(Y_5Z_5 + a_{1,1}\frac{Y_4}{X_4}X_5Z_5 + a_{3,3}\frac{Y_4}{X_4}\frac{Z_4}{X_4}X_5Z_5 - \\ &\quad - \frac{Y_4}{X_4}X_5^2 - a_{2,2}\frac{Y_4}{X_4}\frac{Z_4}{X_4}X_5^2 - a_{6,5}Z_5^2) = 0. \end{aligned}$$

Falls $\frac{X_3}{Y_3} = 0$, so folgt $\frac{Y_4}{X_4} - a_{4,3} = \frac{Z_4}{X_4} = \pi = 0$ und der Punkt liegt nicht in $\phi^{-1}(\mathcal{V}_4 - \{(\frac{X_3}{Y_3}, \frac{Y_4}{X_4} - a_{4,3}, \frac{Z_4}{X_4}, \pi)\})$.

Also bleibt nur $W_5 = \left(\frac{X_3}{Y_3}\right)^2 \frac{Y_4}{X_4} Z_5$ und $F_5^* = 0$.

In $Y_5 \neq 0:$ $\quad \Rightarrow \quad \pi = \frac{W_5}{Y_5}(\frac{Y_4}{X_4} - a_{4,3}),\ \frac{X_3}{Y_3} = \frac{X_5}{Y_5}(\frac{Y_4}{X_4} - a_{4,3})$ und $\frac{Z_4}{X_4} = \frac{Z_5}{Y_5}(\frac{Y_4}{X_4} - a_{4,3})$.

Damit ist $Y_5 \cdot (\pi - \left(\frac{X_3}{Y_3}\right)^2 \frac{Y_4}{X_4}\frac{Z_4}{X_4}) = (\frac{Y_4}{X_4} - a_{4,3})(W_5 - \left(\frac{X_3}{Y_3}\right)^2 \frac{Y_4}{X_4} Z_5) = 0$ und

$$\begin{aligned} Y_5^2 \cdot \frac{F_4}{X_4^2} &= \left(\frac{Y_4}{X_4} - a_{4,3}\right)^2 (Y_5 Z_5 + a_{1,1}\frac{Y_4}{X_4} X_5 Z_5 + a_{3,3}\frac{Y_4}{X_4}\frac{Z_4}{X_4} X_5 Z_5 - \\ &\qquad - \frac{Y_4}{X_4} X_5^2 - a_{2,2}\frac{Y_4}{X_4}\frac{Z_4}{X_4} X_5^2 - a_{6,5} Z_5^2) = 0. \end{aligned}$$

Falls $\frac{Y_4}{X_4} - a_{4,3} = 0$, so folgt $\frac{X_3}{Y_3} = \frac{Z_4}{X_4} = \pi = 0$ und der Punkt liegt nicht in $\phi^{-1}(\mathcal{V}_4 - \{(\frac{X_3}{Y_3}, \frac{Y_4}{X_4} - a_{4,3}, \frac{Z_4}{X_4}, \pi)\})$.

Also bleibt nur $W_5 = \left(\frac{X_3}{Y_3}\right)^2 \frac{Y_4}{X_4} Z_5$ und $F_5^* = 0$.

In $Z_5 \neq 0:$ $\quad \Rightarrow \quad \pi = \frac{W_5}{Z_5}\frac{Z_4}{X_4},\ \frac{X_3}{Y_3} = \frac{X_5}{Z_5}\frac{Z_4}{X_4}$ und $\frac{Y_4}{X_4} - a_{4,3} = \frac{Y_5}{Z_5}\frac{Z_4}{X_4}$.

Damit ist $Z_5 \cdot (\pi - \left(\frac{X_3}{Y_3}\right)^2 \frac{Y_4}{X_4}\frac{Z_4}{X_4}) = \frac{Z_4}{X_4}(W_5 - \left(\frac{X_3}{Y_3}\right)^2 \frac{Y_4}{X_4} Z_5) = 0$ und

$$\begin{aligned} Z_5^2 \cdot \frac{F_4}{X_4^2} &= \left(\frac{Z_4}{X_4}\right)^2 (Y_5 Z_5 + a_{1,1}\frac{Y_4}{X_4} X_5 Z_5 + a_{3,3}\frac{Y_4}{X_4}\frac{Z_4}{X_4} X_5 Z_5 - \\ &\qquad - \frac{Y_4}{X_4} X_5^2 - a_{2,2}\frac{Y_4}{X_4}\frac{Z_4}{X_4} X_5^2 - a_{6,5} Z_5^2) = 0. \end{aligned}$$

Falls $\frac{Z_4}{X_4} = 0$, so folgt $\frac{X_3}{Y_3} = \frac{Y_4}{X_4} - a_{4,3} = \pi = 0$ und der Punkt liegt nicht in $\phi^{-1}(\mathcal{V}_4 - \{(\frac{X_3}{Y_3}, \frac{Y_4}{X_4} - a_{4,3}, \frac{Z_4}{X_4}, \pi)\})$.

Also bleibt nur $W_5 = \left(\frac{X_3}{Y_3}\right)^2 \frac{Y_4}{X_4} Z_5$ und $F_5^* = 0$.

Man bekommt also $\mathcal{V}_5$ durch das Ideal $(W_5 - \left(\frac{X_3}{Y_3}\right)^2 \frac{Y_4}{X_4} Z_5, F_5^*)$ in **Proj** $\mathcal{S}$. Dabei gilt

$$\begin{aligned} X_5\pi - W_5\frac{X_3}{Y_3} &= X_5\pi - Z_5\left(\frac{X_3}{Y_3}\right)^3\frac{Y_4}{X_4} &&= X_5\Big(\pi - \left(\frac{X_3}{Y_3}\right)^2\frac{Y_4}{X_4}\frac{Z_4}{X_4}\Big), \\ Y_5\pi - W_5\left(\frac{Y_4}{X_4} - a_{4,3}\right) &= Y_5\pi - Z_5\left(\frac{X_3}{Y_3}\right)^2\frac{Y_4}{X_4}\left(\frac{Y_4}{X_4} - a_{4,3}\right) &&= Y_5\Big(\pi - \left(\frac{X_3}{Y_3}\right)^2\frac{Y_4}{X_4}\frac{Z_4}{X_4}\Big), \\ Z_5\pi - W_5\frac{Z_4}{X_4} &= &&= Z_5\Big(\pi - \left(\frac{X_3}{Y_3}\right)^2\frac{Y_4}{X_4}\frac{Z_4}{X_4}\Big). \end{aligned}$$

Da mit $Z_5 = 0$ auch $W_5 = 0$ ist, aber nicht $W_5 = X_5 = Y_5 = Z_5 = 0$ sein kann, folgt daraus, daß $\pi - \left(\frac{X_3}{Y_3}\right)^2 \frac{Y_4}{X_4}\frac{Z_4}{X_4} = 0$ ist. Somit ist $\mathcal{V}_5$ isomorph zu

$$\mathit{Proj}\ \ R[\frac{X_3}{Y_3}, \frac{Y_4}{X_4}, \frac{Z_4}{X_4}][X_5, Y_5, Z_5]/(I_{X_4}, \pi - \left(\frac{X_3}{Y_3}\right)^2 \frac{Y_4}{X_4}\frac{Z_4}{X_4}, F_5), \text{ wobei}$$

$$I_{X_4} = \left(X_5\left(\frac{Y_4}{X_4} - a_{4,3}\right) - Y_5\frac{X_3}{Y_3},\ X_5\frac{Z_4}{X_4} - Z_5\frac{X_3}{Y_3},\ Y_5\frac{Z_4}{X_4} - Z_5\left(\frac{Y_4}{X_4} - a_{4,3}\right)\right) \quad \text{und}$$

$$F_5 := Y_5Z_5 + a_{1,1}\frac{Y_4}{X_4}X_5Z_5 + a_{3,3}\frac{Y_4}{X_4}\frac{Z_4}{X_4}X_5Z_5 - \frac{Y_4}{X_4}X_5^2 - a_{2,2}\frac{Y_4}{X_4}\frac{Z_4}{X_4}X_5^2 - a_{6,5}Z_5^2.$$

$\widetilde{\mathcal{V}}_5$ besteht aus folgenden Komponenten:

$\pi = 0 \Rightarrow \left(\frac{X_3}{Y_3}\right)^2 \frac{Y_4}{X_4}\frac{Z_4}{X_4} = 0$

- $\underline{\frac{X_3}{Y_3} = 0} \Rightarrow X_5(\frac{Y_4}{X_4} - a_{4,3}) = X_5\frac{Z_4}{X_4} = 0$. Sei zunächst $\underline{X_5 = 0}$. Daraus folgt wegen $F_5 = 0$, daß $(Y_5 - a_{6,5}Z_5)Z_5 = 0$ ist. Zuerst sei
  - ∗ $\underline{Z_5 = 0} \Rightarrow Y_5 \neq 0 \Rightarrow \underline{\frac{Z_4}{X_4}} = 0$. Dies ist die Komponente C_6 von $\mathcal{V}_4$ mit dem Parameter $\frac{Y_4}{X_4}$. Sei nun
  - ∗ $\underline{Y_5 - a_{6,5}Z_5 = 0} \Rightarrow Z_5 \neq 0$, da sonst auch $Y_5 = 0$ wäre. Somit folgt noch $\frac{Y_4}{X_4} - a_{4,3} = \frac{Y_5}{Z_5}\frac{Z_4}{X_4}$, also $\underline{\frac{Y_4}{X_4} - a_{4,3} - a_{6,5}\frac{Z_4}{X_4} = 0}$. Dies ist die Komponente C_7 von $\mathcal{V}_4$ mit dem Parameter $\frac{Z_4}{X_4}$. Es fehlt noch
- $\underline{\frac{X_3}{Y_3} = \frac{Y_4}{X_4} - a_{4,3} = \frac{Z_4}{X_4} = 0}$. Daraus folgt wegen $F_5 = 0$, daß $Y_5Z_5 + a_{1,1}\frac{Y_4}{X_4}X_5Z_5 - \frac{Y_4}{X_4}X_5^2 - a_{6,5}Z_5^2 = 0$, also daß $\underline{Y_5Z_5 + a_{1,1}a_{4,3}X_5Z_5 - a_{4,3}X_5^2 - a_{6,5}Z_5^2 = 0}$ ist. Diese Komponente ist bei der Aufblasung neu hinzugekommen, sie heiße C_8. Da $\tilde{a}_{4,3} \neq 0$ ist, ist sie ein irreduzibler Kegelschnitt und folglich eine projektive Gerade. Ihr Parameter ist $\frac{Y_5}{Z_5}$ beziehungsweise $\frac{Z_5}{Y_5}$.
- $\underline{\frac{Y_4}{X_4} = 0} \Rightarrow a_{4,3}X_5 + \frac{X_3}{Y_3}Y_5 = a_{4,3}Z_5 + \frac{Z_4}{X_4}Y_5 = 0$ und noch $(Y_5 - a_{6,5}Z_5)Z_5 = 0$ wegen $F_5 = 0$. Da $\tilde{a}_{4,3} \neq 0$ ist, folgt $Y_5 \neq 0$, denn sonst wäre auch $X_5 = Z_5 = 0$. Sei nun zunächst
  - ∗ $\underline{Z_5 = 0} \Rightarrow \underline{\frac{Z_4}{X_4} = 0}$ und $\underline{\frac{X_5}{Y_5} = \tilde{a}_{4,3}{}^{-1}\frac{X_3}{Y_3}}$. Dies ist die Komponente C_4 von $\mathcal{V}_4$ mit dem Parameter $\frac{X_3}{Y_3}$. Jetzt sei
  - ∗ $\underline{Y_5 - a_{6,5}Z_5 = 0}$. Diese Komponente gehört nur dann zu $\mathcal{V}_5$, wenn $\tilde{a}_{6,5} \neq 0$ ist. Es gilt weiter $\underline{a_{4,3} + a_{6,5}\frac{Z_4}{X_4} = 0}$ und $\underline{\frac{X_5}{Y_5} = \tilde{a}_{4,3}{}^{-1}\frac{X_3}{Y_3}}$. Dies ist die Komponente C_5 von $\mathcal{V}_4$ mit dem Parameter $\frac{X_3}{Y_3}$.
- $\underline{\frac{Z_4}{X_4} = 0} \Rightarrow Z_5\frac{X_3}{Y_3} = Z_5(\frac{Y_4}{X_4} - a_{4,3}) = 0$. Der Fall $\frac{X_3}{Y_3} = \frac{Y_4}{X_4} - a_{4,3} = 0$ wurde soeben als Komponente C_8 schon behandelt. Deshalb sei jetzt $\underline{Z_5 = 0}$. Wegen $F_5 = 0$ folgt daraus, daß $\frac{Y_4}{X_4}X_5^2 = 0$ ist. Sei zunächst $\underline{\frac{Y_4}{X_4} = 0} \Rightarrow a_{4,3}X_5 + \frac{X_3}{Y_3}Y_5 = 0$. Da $\tilde{a}_{4,3} \neq 0$ ist, folgt $Y_5 \neq 0$, denn sonst wäre auch $X_5 = 0$. Also ist $\underline{\frac{X_5}{Y_5} = \tilde{a}_{4,3}{}^{-1}\frac{X_3}{Y_3}}$. Dies ist wieder die Komponente C_4 von $\mathcal{V}_4$ mit dem Parameter $\frac{X_3}{Y_3}$.
- $\underline{\frac{Z_4}{X_4} = Z_5 = X_5 = 0} \Rightarrow Y_5 \neq 0 \Rightarrow \underline{\frac{X_3}{Y_3} = 0}$. Dies ist wieder die Komponente C_6.

Die Komponenten schneiden sich in folgenden Punkten:

$$C_6 \cap C_8 = \left\{\left(\frac{X_3}{Y_3}, \frac{Y_4}{X_4} - a_{4,3}, \frac{Z_4}{X_4}, X_5, Z_5, \pi\right)\right\} \quad \text{und}$$

$$C_7 \cap C_8 = \left\{\left(\frac{X_3}{Y_3}, \frac{Y_4}{X_4} - a_{4,3}, \frac{Z_4}{X_4}, X_5, Y_5 - a_{6,5}Z_5, \pi\right)\right\}.$$

Diese beiden Punkte sind verschieden. Weitere Schnittpunkte von C_8 mit anderen Komponenten gibt es nicht.

Die Komponenten haben folgende Vielfachheiten:

<u>C_6 ist vierfach.</u> Denn $\pi = \left(\frac{X_3}{Y_3}\right)^2 \frac{Y_4}{X_4}\frac{Z_4}{X_4}$, $X_5(\frac{Y_4}{X_4} - a_{4,3}) = Y_5\frac{X_3}{Y_3}$, $Y_5\frac{Z_4}{X_4} = Z_5(\frac{Y_4}{X_4} - a_{4,3})$ und da $Y_5 \neq 0$ ist und $\frac{Y_4}{X_4} - a_{4,3}$ auf C_6 nicht identisch verschwindet, gilt $\frac{X_3}{Y_3} \sim X_5$ und $\frac{Z_4}{X_4} \sim Z_5$ im lokalen Ring $\mathcal{O}_{\mathcal{V}_5,\eta}$ des generischen Punktes η von C_6. Aus $F_5 = 0$ folgt

$$Z_5\left(Y_5 + a_{1,1}\frac{Y_4}{X_4}X_5 + a_{3,3}\frac{Y_4}{X_4}\frac{Z_4}{X_4}X_5 - a_{6,5}Z_5\right) = \left(\frac{Y_4}{X_4} + a_{2,2}\frac{Y_4}{X_4}\frac{Z_4}{X_4}\right)X_5^2.$$

Die Terme in Klammern auf beiden Seiten der Gleichung verschwinden nicht identisch auf C_6 und sind somit Einheiten in $\mathcal{O}_{\mathcal{V}_5,\eta}$. Somit sind $\frac{X_3}{Y_3}$ und X_5 beides Erzeugende des maximalen Ideals von $\mathcal{O}_{\mathcal{V}_5,\eta}$ und sie verschwinden zur Ordnung 1 auf C_6. Deshalb verschwinden Z_5 und $\frac{Z_4}{X_4}$ zur Ordnung 2 auf C_6 und π zur Ordnung 4. Dies bedeutet, daß C_6 vierfach ist.

<u>C_7 ist doppelt.</u> Denn $\pi = \left(\frac{X_3}{Y_3}\right)^2 \frac{Y_4}{X_4}\frac{Z_4}{X_4}$, $X_5\frac{Z_4}{X_4} = Z_5\frac{X_3}{Y_3}$ und da $Z_5 \neq 0$ ist und $\frac{Z_4}{X_4}$ auf C_7 nicht identisch verschwindet, gilt $\frac{X_3}{Y_3} \sim X_5$ im lokalen Ring $\mathcal{O}_{\mathcal{V}_5,\eta}$ des generischen Punktes η von C_7. Aus $F_5 = 0$ folgt

$$(Y_5 - a_{6,5}Z_5)Z_5 = \left(\frac{Y_4}{X_4}X_5 + a_{2,2}\frac{Y_4}{X_4}\frac{Z_4}{X_4}X_5 - a_{1,1}\frac{Y_4}{X_4}Z_5 - a_{3,3}\frac{Y_4}{X_4}\frac{Z_4}{X_4}Z_5\right)X_5.$$

Der Term Z_5 auf der linken Seite der Gleichung ist $\neq 0$ und somit eine Einheit in $\mathcal{O}_{\mathcal{V}_5,\eta}$. Also liegt $Y_5 - a_{6,5}Z_5$ in dem von $\frac{X_3}{Y_3}$ erzeugten Ideal von $\mathcal{O}_{\mathcal{V}_5,\eta}$. Da $Y_5\frac{Z_4}{X_4} = Z_5(\frac{Y_4}{X_4} - a_{4,3})$ auf ganz $\mathcal{V}_5$ gilt, folgt daß auch $\frac{Y_4}{X_4} - a_{4,3} - a_{6,5}\frac{Z_4}{X_4} = \frac{1}{Z_5}\frac{Z_4}{X_4}(Y_5 - a_{6,5}Z_5)$ in diesem Ideal liegt. Also wird das maximale Ideal von $\mathcal{O}_{\mathcal{V}_5,\eta}$ von $\frac{X_3}{Y_3}$ erzeugt. Da auch $\frac{Y_4}{X_4} = a_{4,3}$ eine Einheit in $\mathcal{O}_{\mathcal{V}_5,\eta}$ ist, ist die Ordnung von π auf C_7 gleich 2. Dies bedeutet, daß C_7 doppelt ist.

<u>C_8 ist dreifach.</u> Denn $\pi = \left(\frac{X_3}{Y_3}\right)^2 \frac{Y_4}{X_4}\frac{Z_4}{X_4}$, $X_5\frac{Z_4}{X_4} - Z_5\frac{X_3}{Y_3}$, $Y_5\frac{Z_4}{X_4} - Z_5(\frac{Y_4}{X_4} - a_{4,3})$ und da X_5, Y_5 und Z_5 auf C_8 nicht identisch verschwinden, gilt $\frac{X_3}{Y_3} \sim \left(\frac{Y_4}{X_4} - a_{4,3}\right) \sim \frac{Z_4}{X_4}$ im lokalen Ring $\mathcal{O}_{\mathcal{V}_5,\eta}$ des generischen Punktes η von C_8. Aus $F_5 = 0$ folgt

$$\begin{aligned} Y_5Z_5 + a_{1,1}a_{4,3}X_5Z_5 - a_{4,3}X_5^2 - a_{6,5}Z_5^2 &= \\ \left(\frac{Y_4}{X_4} - a_{4,3}\right)(X_5^2 - a_{1,1}X_5Z_5) &+ \frac{Z_4}{X_4}\left(a_{2,2}\frac{Y_4}{X_4}X_5^2 - a_{3,3}\frac{Y_4}{X_4}X_5Z_5\right). \end{aligned}$$

Somit sind $\frac{X_3}{Y_3}$, $\frac{Y_4}{X_4} - a_{4,3}$ und $\frac{Z_4}{X_4}$ alle drei Erzeugende des maximalen Ideals von $\mathcal{O}_{\mathcal{V}_5,\eta}$ und verschwinden zur Ordnung 1 auf C_8. Da $\tilde{a}_{4,3} \neq 0$ ist, ist $\frac{Y_4}{X_4}$ eine Einheit in $\mathcal{O}_{\mathcal{V}_5,\eta}$. Dies bedeutet, daß π mit Ordnung 3 auf C_8 verschwindet und daß C_8 dreifach ist.

5.11.7 Die singulären Punkte von $\mathcal{V}_5$

Da $\mathbf{A}^3_R \times_{Spec\,R} \mathbf{P}^2_R$ ein reguläres sechsdimensionales Schema ist, wird das maximale Ideal des lokalen Ringes eines jeden abgeschlossenen Punktes von sechs Elementen erzeugt. Somit werden auch auf dem Unterschema $\mathcal{V}_5$ höchstens sechs Elemente zum Erzeugen des maximalen Ideals eines abgeschlossenen Punktes benötigt.

Sei nun $P \in \widetilde{\mathcal{V}}_5$ ein abgeschlossener Punkt und $\mathcal{M}$ das maximale Ideal in $\mathcal{O}_{\mathcal{V}_5,P}$.

$\underline{\text{Auf } \mathcal{V}_5 - C_8}$ liegen keine singulären Punkte, da $\mathcal{V}_5 - C_8 \cong \mathcal{V}_4 - \{(\frac{X_3}{Y_3}, \frac{Y_4}{X_4} - a_{4,3}, \frac{Z_4}{X_4}, \pi)\}$ und somit regulär ist.

$\underline{P = C_8 \cap C_6}$:
dann ist $\mathcal{M} = (\frac{X_3}{Y_3},\ \frac{Y_4}{X_4} - a_{4,3},\ \frac{Z_4}{X_4},\ X_5,\ Z_5,\ \pi)$. Somit sind $Y_5,\ Y_5 - a_{6,5}Z_5 \notin \mathcal{M}$ und es gilt $\frac{Z_4}{X_4} = \frac{Z_5}{Y_5}(\frac{Y_4}{X_4} - a_{4,3}),\ \ \frac{X_3}{Y_3} = \frac{X_5}{Y_5}(\frac{Y_4}{X_4} - a_{4,3}),\ \ \pi = \left(\frac{X_3}{Y_3}\right)^2 \frac{Y_4}{X_4}\frac{Z_4}{X_4}$ und

$$Z_5 \;=\; \frac{X_5}{Y_5 - a_{6,5}Z_5}\left(\frac{Y_4}{X_4}X_5 + a_{2,2}\frac{Y_4}{X_4}\frac{Z_4}{X_4}X_5 - a_{1,1}\frac{Y_4}{X_4}Z_5 - a_{3,3}\frac{Y_4}{X_4}\frac{Z_4}{X_4}Z_5\right).$$

Das bedeutet $\mathcal{M} = (\frac{Y_4}{X_4} - a_{4,3},\ X_5)$ und P ist regulär.

$\underline{C_8 - C_6}$ ist ein regulärer Kegelschnitt und damit nach Satz 2.21 auch als Teilmenge von $\mathcal{V}_5$ regulär.

Also ist $\mathcal{V}_5$ regulär und als abgeschlossenes Unterschema eines Produkts von $\mathbf{P}^m_R$ auch eigentlich über R. Man hat den Reduktionstyp III* und erhält $\mathcal{C}$ durch Zusammenkleben von $\mathcal{V}_5$ mit all den weggeschnittenen Teilen. Die einfachen Komponenten sind C_1 und C_5. Diese sind über k definiert. Es ist $m = 8$ und $c = 2$.

5.12 Beweis von Schritt 10

In Schritt 9, Abschnitt 5.11.2 hatten wir das Schema

$$\mathcal{V}_3 \;=\; Proj\ R[\frac{X_1}{Z_1}, \frac{Y_2}{Z_2}][X_3, Y_3, Z_3]/(I_{Z_2}, F_3) \text{ erhalten, mit}$$

$$I_{Z_2} \;=\; (Y_3\frac{X_1}{Z_1} - X_3\frac{Y_2}{Z_2},\ X_3\pi - Z_3\frac{X_1}{Z_1},\ Y_3\pi - Z_3\frac{Y_2}{Z_2}) \quad \text{und}$$

$$F_3 \;=\; \pi Y_3^2 + \pi a_{1,1}X_3Y_3 + \pi a_{3,3}Y_3Z_3 - \frac{X_1}{Z_1}X_3^2 - \pi a_{2,2}X_3^2 - a_{4,3}X_3Z_3 - a_{6,5}Z_3^2.$$

Dieses wurde dort unter der Annahme $\pi^4 \nmid a_4$ untersucht. In Schritt 10 gilt nun stattdessen $\pi^4 \mid a_4$ und $\pi^6 \nmid a_6$. Die Annahme $\pi^6 \nmid a_6$ wird bei der folgenden Untersuchung aber vorerst nicht benützt. Sie wird erst ab der Bestimmung der speziellen Faser von $\mathcal{V}_5$ in Abschnitt 5.12.3 verwendet. An dieser Stelle wird nocheinmal ausdrücklich darauf hingewiesen. Alles, was davor herausgefunden wurde gilt somit in Schritt 11 genauso.

$\widetilde{\mathcal{V}}_3$ besteht hier nun aus folgenden Komponenten:

$\pi = 0 \Rightarrow Z_3\frac{X_1}{Z_1} = Z_3\frac{Y_2}{Z_2} = 0$

- $\underline{Z_3 = 0}$ $\Rightarrow$ wegen $F_3 = 0$, daß $\frac{X_1}{Z_1}X_3^2 = 0$ ist. Sei zunächst $\underline{X_3 = 0}$ $\Rightarrow Y_3 \neq 0 \Rightarrow$ $\underline{\frac{X_1}{Z_1} = 0}$. Dies ist die Komponente C_3 von $\mathcal{V}_2$ mit dem Parameter $\frac{Y_2}{Z_2}$. Sei nun
- $\underline{Z_3 = \frac{X_1}{Z_1} = 0}$ $\Rightarrow X_3\frac{Y_2}{Z_2} = 0$. Den Fall $X_3 = 0$ haben wir soeben als Komponente C_3 schon behandelt. Also bleibt noch $\underline{\frac{Y_2}{Z_2} = 0}$. Diese Komponente ist bei der Aufblasung neu hinzugekommen, sie heiße C_4. Ihr Parameter ist $\frac{Y_3}{X_3}$ beziehungsweise $\frac{X_3}{Y_3}$. Jetzt fehlt noch
- $\underline{\frac{X_1}{Z_1} = \frac{Y_2}{Z_2} = 0}$. Wegen $F_3 = 0$ folgt $\underline{Z_3 = 0}$. Dies ist wieder die Komponente C_4.

5.12.1 Die singulären Punkte von $\mathcal{V}_3$

Da $\mathbf{A}^2_R \times_{Spec\,R} \mathbf{P}^2_R$ ein reguläres fünfdimensionales Schema ist, wird das maximale Ideal des lokalen Ringes eines jeden abgeschlossenen Punktes von fünf Elementen erzeugt. Somit werden auch auf dem Unterschema $\mathcal{V}_3$ höchstens fünf Elemente zum Erzeugen des maximalen Ideals eines abgeschlossenen Punktes benötigt.

Sei nun $P \in \widetilde{\mathcal{V}}_3$ ein abgeschlossener Punkt und $\mathcal{M}$ das maximale Ideal in $\mathcal{O}_{\mathcal{V}_3,P}$.

$\underline{\text{Auf } \mathcal{V}_3 - C_4}$ liegen keine singulären Punkte, da $\mathcal{V}_3 - C_4 \cong \mathcal{V}_2 - \{(\frac{X_1}{Z_1}, \frac{Y_2}{Z_2}, \pi)\}$ und somit regulär ist.

$\underline{P \in C_4 - C_3\text{:}}$
dann ist $\mathcal{M} = (\frac{X_1}{Z_1}, \frac{Y_2}{Z_2}, p(X_3,Y_3), Z_3, \pi)$. Es ist $X_3 \notin \mathcal{M}$, da $P \notin C_3$ ist. Also gilt $\pi = \frac{Z_3}{X_3}\frac{X_1}{Z_1}$,

$$\frac{X_1}{Z_1} = \frac{1}{X_3^2}\left(\pi(Y_3^2 + a_{1,1}X_3Y_3 + a_{3,3}Y_3Z_3 - a_{2,2}X_3^2 - a_{4,4}X_3Z_3) - a_{6,5}Z_3^2\right)$$

und $\frac{Y_2}{Z_2} = \frac{Y_3}{X_3}\frac{X_1}{Z_1}$. Das bedeutet $\mathcal{M} = (p, Z_3)$ und P ist regulär.

$\underline{P = C_3 \cap C_4}$ ist singulärer Punkt,
denn $\mathcal{M} = (\frac{X_1}{Z_1}, \frac{Y_2}{Z_2}, X_3, Z_3, \pi)$ und die drei Erzeuger von I_{Z_2}, sowie F_3 mod $\mathcal{M}^2$ ergeben

$$\frac{X_1}{Z_1} \equiv 0, \quad 0 \equiv 0, \quad \pi \equiv 0, \quad \text{und} \quad \pi \equiv 0 \mod \mathcal{M}^2.$$

Dies bedeutet, daß $\frac{Y_2}{Z_2}$, X_3, Z_3 mod $\mathcal{M}^2$ in keiner Relation stehen und linear unabhängig über $k = \mathcal{O}_{\mathcal{V}_3,P}/\mathcal{M}$ sind. Also ist P singulär und wird als nächstes aufgeblasen.

Dazu betrachte man wie in Schritt 9 das offene Unterschema $\mathcal{V}_3 - \overline{\{(Y_3)\}}$. Diese Aufblasung wurde in Abschnitt 5.11.4 bereits durchgeführt und lieferte

$$\mathcal{V}_4 = Proj\ R[\frac{Y_2}{Z_2}, \frac{X_3}{Y_3}, \frac{Z_3}{Y_3}][X_4, Y_4, Z_4]/(I_{Y_3}, \pi - \frac{Y_2}{Z_2}\frac{Z_3}{Y_3}, F_4), \text{ mit}$$

$$I_{Y_3} = (X_4\frac{Y_2}{Z_2} - Y_4\frac{X_3}{Y_3},\ X_4\frac{Z_3}{Y_3} - Z_4\frac{X_3}{Y_3},\ Y_4\frac{Z_3}{Y_3} - Z_4\frac{Y_2}{Z_2}) \quad \text{und}$$

$$F_4 = Y_4Z_4 + a_{1,1}\frac{Z_3}{Y_3}X_4Y_4 + a_{3,3}\frac{Z_3}{Y_3}Y_4Z_4 - \left(\frac{X_3}{Y_3}\right)^2 X_4Y_4 - \pi a_{2,2}X_4^2 - a_{4,3}X_4Z_4 - a_{6,5}Z_4^2.$$

Diesmal besteht $\widetilde{\mathcal{V}}_4$ aus folgenden Komponenten:

$\pi = 0 \Rightarrow \frac{Y_2}{Z_2}\frac{Z_3}{Y_3} = 0$

- $\underline{\frac{Y_2}{Z_2} = 0} \Rightarrow Y_4\frac{X_3}{Y_3} = Y_4\frac{Z_3}{Y_3} = 0$. Sei zunächst $\underline{Y_4 = 0}$. Wegen $F_4 = 0$ folgt daraus $\underline{Z_4 = 0} \Rightarrow X_4 \neq 0 \Rightarrow \underline{\frac{Z_3}{Y_3} = 0}$. Dies ist die Komponente C_4 von $\mathcal{V}_3$ mit dem Parameter $\frac{X_3}{Y_3}$. Es fehlt noch
- $\underline{\frac{Y_2}{Z_2} = \frac{X_3}{Y_3} = \frac{Z_3}{Y_3} = 0}$. Daraus folgt wegen $F_4 = 0$, daß $(Y_4 - a_{6,5}Z_4)Z_4 = 0$ ist. Zuerst sei

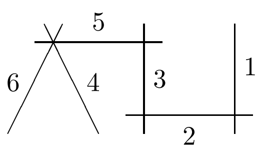
  * $\underline{Z_4 = 0}$. Diese Komponente ist bei der Aufblasung neu hinzugekommen, sie heiße C_5. Ihr Parameter ist $\frac{X_4}{Y_4}$ beziehungsweise $\frac{Y_4}{X_4}$.
  * $\underline{Y_4 - a_{6,5}Z_4 = 0}$. Auch diese Komponente ist bei der Aufblasung neu hinzugekommen, sie heiße C_6. Ihr Parameter ist $\frac{X_4}{Z_4}$ beziehungsweise $\frac{Z_4}{X_4}$. Sei jetzt

- $\underline{\frac{Z_3}{Y_3} = 0} \Rightarrow Z_4\frac{Y_2}{Z_2} = Z_4\frac{X_3}{Y_3} = 0$. Der Fall $\frac{Y_2}{Z_2} = \frac{Z_3}{Y_3} = 0$ wurde soeben als Komponenten C_5 und C_6 schon behandelt. Deshalb sei jetzt $\underline{Z_4 = 0}$. Wegen $F_4 = 0$ folgt daraus, daß $\left(\frac{X_3}{Y_3}\right)^2 X_4Y_4 = 0$ ist. Sei zunächst $\underline{\frac{X_3}{Y_3} = 0} \Rightarrow X_4\frac{Y_2}{Z_2} = 0$.

  * $\underline{X_4 = 0}$. Dies ist die Komponente C_3 von $\mathcal{V}_3$ mit dem Parameter $\frac{Y_2}{Z_2}$.
  * $\underline{\frac{Y_2}{Z_2} = 0}$. Dieser Komponente haben wir soeben den Namen C_5 gegeben. Ihr Parameter ist $\frac{X_4}{Y_4}$ beziehungsweise $\frac{Y_4}{X_4}$. Schließlich fehlen noch

- $\underline{\frac{Z_3}{Y_3} = Z_4 = X_4 = 0} \Rightarrow Y_4 \neq 0 \Rightarrow \underline{\frac{X_3}{Y_3} = 0}$. Dies ist wieder die Komponente C_3.
- $\underline{\frac{Z_3}{Y_3} = Z_4 = Y_4 = 0} \Rightarrow X_4 \neq 0 \Rightarrow \underline{\frac{Y_2}{Z_2} = 0}$. Dies ist wieder die Komponente C_4.

Diese Komponenten sind wie folgt angeordnet:



Die kleinen Zahlen geben dabei die Nummern der Komponenten an.

Sie schneiden sich in den Punkten

$$\begin{aligned} C_3 \cap C_5 &= \left\{\left(\frac{Y_2}{Z_2}, \frac{X_3}{Y_3}, \frac{Z_3}{Y_3}, X_4, Z_4, \pi\right)\right\} \quad \text{und} \\ C_4 \cap C_5 \cap C_6 &= \left\{\left(\frac{Y_2}{Z_2}, \frac{X_3}{Y_3}, \frac{Z_3}{Y_3}, Y_4, Z_4, \pi\right)\right\}. \end{aligned}$$

Die Komponente C_3 ist dabei dreifach. Denn $\pi = \frac{Y_2}{Z_2}\frac{Z_3}{Y_3}$, $X_4\frac{Y_2}{Z_2} = Y_4\frac{X_3}{Y_3}$, $Y_4\frac{Z_3}{Y_3} = Z_4\frac{Y_2}{Z_2}$ und da $Y_4 \neq 0$ ist und $\frac{Y_2}{Z_2}$ auf C_3 nicht identisch verschwindet, gilt $\pi \sim \frac{Z_3}{Y_3} \sim Z_4$ und $\frac{X_3}{Y_3} \sim X_4$ im lokalen Ring $\mathcal{O}_{\mathcal{V}_4,\eta}$ des generischen Punktes η von C_3. In F_4 eingesetzt erhält man

$$Z_4\left(Y_4 + a_{1,1}\frac{Y_2}{Z_2}X_4 + a_{3,3}\frac{Z_3}{Y_3}Y_4 - a_{2,2}\frac{Y_2}{Z_2}\frac{X_3}{Y_3}X_4 - \pi a_{4,4}X_4 - a_{6,5}Z_4\right) \;=\; Y_4\left(\frac{X_3}{Y_3}\right)^2 X_4.$$

Der Term in Klammern auf der linken Seite und Y_4 auf der rechten Seite der Gleichung verschwinden nicht identisch auf C_3 und sind somit Einheiten in $\mathcal{O}_{\mathcal{V}_4,\eta}$. Wegen $\frac{X_3}{Y_3} \sim X_4$ sind also $\frac{X_3}{Y_3}$ und X_4 beides Erzeugende des maximalen Ideals von $\mathcal{O}_{\mathcal{V}_4,\eta}$ und sie verschwinden zur Ordnung 1 auf C_3. Somit ist die Ordnung von π auf C_3 gleich 3. Dies bedeutet, daß C_3 dreifach ist.

5.12.2 Die singulären Punkte von $\mathcal{V}_4$

Da $\mathbf{A}^3_R \times_{Spec\,R} \mathbf{P}^2_R$ ein reguläres sechsdimensionales Schema ist, wird das maximale Ideal des lokalen Ringes eines jeden abgeschlossenen Punktes von sechs Elementen erzeugt. Somit werden auch auf dem Unterschema $\mathcal{V}_4$ höchstens sechs Elemente zum Erzeugen des maximalen Ideals eines abgeschlossenen Punktes benötigt.

Sei nun $P \in \widetilde{\mathcal{V}}_4$ ein abgeschlossener Punkt und $\mathcal{M}$ das maximale Ideal in $\mathcal{O}_{\mathcal{V}_4,P}$.

Auf $\mathcal{V}_4 - (C_5 \cup C_6)$ liegen keine singulären Punkte,
da $\mathcal{V}_4 - (C_5 \cup C_6) \cong \mathcal{V}_3 - \{(\frac{Y_2}{Z_2}, \frac{X_3}{Y_3}, \frac{Z_3}{Y_3}, \pi)\}$ und somit regulär ist.

$P \in C_5 - (C_4 \cap C_6)$:
dann ist $\mathcal{M} = (\frac{Y_2}{Z_2}, \frac{X_3}{Y_3}, \frac{Z_3}{Y_3}, p(X_4, Y_4), Z_4, \pi)$. Es gilt Y_4, $Y_4 - a_{6,5}Z_4 \notin \mathcal{M}$, da $P \neq C_4 \cap C_6$ ist. Damit ist $\pi = \frac{Y_2}{Z_2}\frac{Z_3}{Y_3}$, $\frac{X_3}{Y_3} = \frac{X_4}{Y_4}\frac{Y_2}{Z_2}$, $\frac{Z_3}{Y_3} = \frac{Z_4}{Y_4}\frac{Y_2}{Z_2}$ und

$$Z_4 \;=\; \frac{1}{Y_4 - a_{6,5}Z_4}\Big(\left(\frac{X_3}{Y_3}\right)^2 X_4Y_4 + \pi a_{2,2}X_4^2 + \pi a_{4,4}X_4Z_4 - a_{1,1}\frac{Z_3}{Y_3}X_4Y_4 - a_{3,3}\frac{Z_3}{Y_3}Y_4Z_4\Big).$$

Das bedeutet $\mathcal{M} = (\frac{Y_2}{Z_2}, p)$ und P ist regulär.

$P \in C_6 - (C_4 \cap C_5)$:
dann ist $\mathcal{M} = (\frac{Y_2}{Z_2}, \frac{X_3}{Y_3}, \frac{Z_3}{Y_3}, p(X_4, Z_4), Y_4 - a_{6,5}Z_4, \pi)$. Es gilt $Z_4 \notin \mathcal{M}$, denn sonst wäre auch $Y_4 \in \mathcal{M}$ und damit $P = C_4 \cap C_5 \cap C_6$. Also hat man $\pi = \frac{Y_2}{Z_2}\frac{Z_3}{Y_3}$, $\frac{X_3}{Y_3} = \frac{X_4}{Z_4}\frac{Z_3}{Y_3}$, $\frac{Y_2}{Z_2} = \frac{Y_4}{Z_4}\frac{Z_3}{Y_3}$ und

$$Y_4 - a_{6,5}Z_4 \;=\; \frac{1}{Z_4}\Big(\left(\frac{X_3}{Y_3}\right)^2 X_4Y_4 + \pi a_{2,2}X_4^2 + \pi a_{4,4}X_4Z_4 - a_{1,1}\frac{Z_3}{Y_3}X_4Y_4 - a_{3,3}\frac{Z_3}{Y_3}Y_4Z_4\Big).$$

Das bedeutet $\mathcal{M} = (\frac{Z_3}{Y_3}, p)$ und P ist regulär.

Der Punkt $P = C_4 \cap C_5 \cap C_6$ ist singulär,
denn dort ist $\mathcal{M} = (\frac{Y_2}{Z_2}, \frac{X_3}{Y_3}, \frac{Z_3}{Y_3}, Y_4, Z_4, \pi)$ und deshalb $X_4 \notin \mathcal{M}$. Die drei Erzeuger von I_{Y_3}, sowie $\pi - \frac{Y_2}{Z_2}\frac{Z_3}{Y_3}$ und F_4 mod $\mathcal{M}^2$ ergeben

$$\frac{Y_2}{Z_2} \equiv 0, \quad \frac{Z_3}{Y_3} \equiv 0, \quad 0 \equiv 0, \quad \pi \equiv 0, \quad \text{und} \quad \pi a_{2,2} \equiv 0 \mod \mathcal{M}^2.$$

Dies bedeutet, daß $\frac{X_3}{Y_3}$, Y_4, Z_4 mod $\mathcal{M}^2$ in keiner Relation stehen und linear unabhängig über $k = \mathcal{O}_{\mathcal{V}_4,P}/\mathcal{M}$ sind. Also ist P singulär und wird als nächstes aufgeblasen.

Dazu betrachte man das offene Unterschema von $\mathcal{V}_4$

$$\begin{aligned} P \in \mathcal{V}_4 - \overline{\{(X_4)\}} &= Spec\ R[\frac{Y_2}{Z_2}, \frac{X_3}{Y_3}, \frac{Z_3}{Y_3}, \frac{Y_4}{X_4}, \frac{Z_4}{X_4}]/(I_{Y_3}, \pi - \frac{Y_2}{Z_2}\frac{Z_3}{Y_3}, F_4) \\ &\cong Spec\ R[\frac{X_3}{Y_3}, \frac{Y_4}{X_4}, \frac{Z_4}{X_4}]/(\pi - \left(\frac{X_3}{Y_3}\right)^2 \frac{Y_4}{X_4}\frac{Z_4}{X_4},\ \frac{1}{X_4^2}F_4), \end{aligned}$$

wobei $\frac{1}{X_4^2}F_4 = \frac{Y_4}{X_4}\frac{Z_4}{X_4} + a_{1,1}\frac{X_3}{Y_3}\frac{Y_4}{X_4}\frac{Z_4}{X_4} + a_{3,3}\frac{X_3}{Y_3}\frac{Y_4}{X_4}\left(\frac{Z_4}{X_4}\right)^2 - \left(\frac{X_3}{Y_3}\right)^2\frac{Y_4}{X_4} - a_{2,2}\left(\frac{X_3}{Y_3}\right)^2\frac{Y_4}{X_4}\frac{Z_4}{X_4} - a_{4,4}\left(\frac{X_3}{Y_3}\right)^2\frac{Y_4}{X_4}\left(\frac{Z_4}{X_4}\right)^2 - a_{6,5}\left(\frac{Z_4}{X_4}\right)^2$ ist.

P ist dort gegeben durch $(\frac{X_3}{Y_3}, \frac{Y_4}{X_4}, \frac{Z_4}{X_4}, \pi)$.

5.12.3 Aufblasen von $\mathcal{V}_4$ entlang $(\frac{X_3}{Y_3}, \frac{Y_4}{X_4}, \frac{Z_4}{X_4}, \pi)$

$$\mathcal{I} = (\pi, \frac{X_3}{Y_3}, \frac{Y_4}{X_4}, \frac{Z_4}{X_4}), \qquad \mathcal{S} = \bigoplus_{d\geq 0}\mathcal{I}^d$$

Man hat die surjektive Abbildung $R[\frac{X_3}{Y_3}, \frac{Y_4}{X_4}, \frac{Z_4}{X_4}][W_5, X_5, Y_5, Z_5] \to \mathcal{S}$ durch die Zuordnung $(W_5, X_5, Y_5, Z_5) \mapsto (\pi, \frac{X_3}{Y_3}, \frac{Y_4}{X_4}, \frac{Z_4}{X_4})$.

Ihr Kern ist $I^*_{Y_4} = (\,W_5\frac{X_3}{Y_3} - X_5\pi,\ W_5\frac{Y_4}{X_4} - Y_5\pi,\ W_5\frac{Z_4}{X_4} - Z_5\pi,\ X_5\frac{Y_4}{X_4} - Y_5\frac{X_3}{Y_3},$
$X_5\frac{Z_4}{X_4} - Z_5\frac{X_3}{Y_3},\ Y_5\frac{Z_4}{X_4} - Z_5\frac{Y_4}{X_4}\,)$.

Also ergibt sich $\mathcal{S} \cong R[\frac{X_3}{Y_3}, \frac{Y_4}{X_4}, \frac{Z_4}{X_4}][W_5, X_5, Y_5, Z_5]/I^*_{Y_4}$.

$\phi : Proj\ \mathcal{S} \to \mathbf{A}^3_R$ ist gegeben durch $R[\frac{X_3}{Y_3}, \frac{Y_4}{X_4}, \frac{Z_4}{X_4}] \to \mathcal{S}$.

Die strikte Transformation von $\mathcal{V}_4$ erhält man gemäß Satz 2.32 als den Abschluß

$\mathcal{V}_5 := \overline{\phi^{-1}(\mathcal{V}_4 - \{(\frac{X_3}{Y_3}, \frac{Y_4}{X_4}, \frac{Z_4}{X_4}, \pi)\})}$ in **Proj** $\mathcal{S}$.

Dabei ist $\mathcal{V}_5$ durch folgende Gleichungen gegeben:

In $W_5 \neq 0$: $\Rightarrow$ $\frac{X_3}{Y_3} = \frac{X_5}{W_5}\pi$, $\frac{Y_4}{X_4} = \frac{Y_5}{W_5}\pi$ und $\frac{Z_4}{X_4} = \frac{Z_5}{W_5}\pi$.

Damit ist $W_5 \cdot (\pi - \left(\frac{X_3}{Y_3}\right)^2\frac{Y_4}{X_4}\frac{Z_4}{X_4}) = \pi(W_5 - \left(\frac{X_3}{Y_3}\right)^2\frac{Y_4}{X_4}Z_5) = 0$ und

$$\begin{aligned} W_5^2 \cdot \frac{F_4}{X_4^2} &= \pi^2(Y_5Z_5 + a_{1,1}\frac{Z_4}{X_4}X_5Y_5 + a_{3,3}\left(\frac{Z_4}{X_4}\right)^2 X_5Y_5 - \frac{Y_4}{X_4}X_5^2 - \\ &\quad - a_{2,2}\frac{Y_4}{X_4}\frac{Z_4}{X_4}X_5^2 - a_{4,4}\frac{Y_4}{X_4}\left(\frac{Z_4}{X_4}\right)^2 X_5^2 - a_{6,5}Z_5^2) = 0. \end{aligned}$$

Falls $\pi = 0$, so folgt $\frac{X_3}{Y_3} = \frac{Y_4}{X_4} = \frac{Z_4}{X_4} = 0$ und der Punkt liegt nicht in der Menge $\phi^{-1}(\mathcal{V}_4 - \{(\frac{X_3}{Y_3}, \frac{Y_4}{X_4}, \frac{Z_4}{X_4}, \pi)\})$.

Also bleibt nur $W_5 = \left(\frac{X_3}{Y_3}\right)^2 \frac{Y_4}{X_4} Z_5$ und

$$\begin{aligned} F_5^* \quad := \quad & Y_5 Z_5 + a_{1,1}\frac{Z_4}{X_4}X_5Y_5 + a_{3,3}\left(\frac{Z_4}{X_4}\right)^2 X_5Y_5 - \frac{Y_4}{X_4}X_5^2 - \\ & - a_{2,2}\frac{Y_4}{X_4}\frac{Z_4}{X_4}X_5^2 - a_{4,4}\frac{Y_4}{X_4}\left(\frac{Z_4}{X_4}\right)^2 X_5^2 - a_{6,5}Z_5^2 \quad = \quad 0. \end{aligned}$$

In $X_5 \neq 0:$ $\quad \Rightarrow \quad \pi = \frac{W_5}{X_5}\frac{X_3}{Y_3}, \ \frac{Y_4}{X_4} = \frac{Y_5}{X_5}\frac{X_3}{Y_3}$ und $\frac{Z_4}{X_4} = \frac{Z_5}{X_5}\frac{X_3}{Y_3}$.

Damit ist $X_5 \cdot (\pi - \left(\frac{X_3}{Y_3}\right)^2 \frac{Y_4}{X_4}\frac{Z_4}{X_4}) = \frac{X_3}{Y_3}(W_5 - \left(\frac{X_3}{Y_3}\right)^2 \frac{Y_4}{X_4}Z_5) = 0$ und

$$\begin{aligned} X_5^2 \cdot \frac{F_4}{X_4^2} \quad = \quad & \left(\frac{X_3}{Y_3}\right)^2 (Y_5Z_5 + a_{1,1}\frac{Z_4}{X_4}X_5Y_5 + a_{3,3}\left(\frac{Z_4}{X_4}\right)^2 X_5Y_5 - \frac{Y_4}{X_4}X_5^2 - \\ & - a_{2,2}\frac{Y_4}{X_4}\frac{Z_4}{X_4}X_5^2 - a_{4,4}\frac{Y_4}{X_4}\left(\frac{Z_4}{X_4}\right)^2 X_5^2 - a_{6,5}Z_5^2) = 0. \end{aligned}$$

Falls $\frac{X_3}{Y_3} = 0$, so folgt $\frac{Y_4}{X_4} = \frac{Z_4}{X_4} = \pi = 0$ und der Punkt liegt nicht in der Menge $\phi^{-1}(\mathcal{V}_4 - \{(\frac{X_3}{Y_3}, \frac{Y_4}{X_4}, \frac{Z_4}{X_4}, \pi)\})$.

Also bleibt nur $W_5 = \left(\frac{X_3}{Y_3}\right)^2 \frac{Y_4}{X_4} Z_5$ und $F_5^* = 0$.

In $Y_5 \neq 0:$ $\quad \Rightarrow \quad \pi = \frac{W_5}{Y_5}\frac{Y_4}{X_4}, \ \frac{X_3}{Y_3} = \frac{X_5}{Y_5}\frac{Y_4}{X_4}$ und $\frac{Z_4}{X_4} = \frac{Z_5}{Y_5}\frac{Y_4}{X_4}$.

Damit ist $Y_5 \cdot (\pi - \left(\frac{X_3}{Y_3}\right)^2 \frac{Y_4}{X_4}\frac{Z_4}{X_4}) = \frac{Y_4}{X_4}(W_5 - \left(\frac{X_3}{Y_3}\right)^2 \frac{Y_4}{X_4}Z_5) = 0$ und

$$\begin{aligned} Y_5^2 \cdot \frac{F_4}{X_4^2} \quad = \quad & \left(\frac{Y_4}{X_4}\right)^2 (Y_5Z_5 + a_{1,1}\frac{Z_4}{X_4}X_5Y_5 + a_{3,3}\left(\frac{Z_4}{X_4}\right)^2 X_5Y_5 - \frac{Y_4}{X_4}X_5^2 - \\ & - a_{2,2}\frac{Y_4}{X_4}\frac{Z_4}{X_4}X_5^2 - a_{4,4}\frac{Y_4}{X_4}\left(\frac{Z_4}{X_4}\right)^2 X_5^2 - a_{6,5}Z_5^2) = 0. \end{aligned}$$

Falls $\frac{Y_4}{X_4} = 0$, so folgt $\frac{X_3}{Y_3} = \frac{Z_4}{X_4} = \pi = 0$ und der Punkt liegt nicht in der Menge $\phi^{-1}(\mathcal{V}_4 - \{(\frac{X_3}{Y_3}, \frac{Y_4}{X_4}, \frac{Z_4}{X_4}, \pi)\})$.

Also bleibt nur $W_5 = \left(\frac{X_3}{Y_3}\right)^2 \frac{Y_4}{X_4} Z_5$ und $F_5^* = 0$.

In $Z_5 \neq 0:$ $\quad \Rightarrow \quad \pi = \frac{W_5}{Z_5}\frac{Z_4}{X_4}, \ \frac{X_3}{Y_3} = \frac{X_5}{Z_5}\frac{Z_4}{X_4}$ und $\frac{Y_4}{X_4} = \frac{Y_5}{Z_5}\frac{Z_4}{X_4}$.

Damit ist $Z_5 \cdot (\pi - \left(\frac{X_3}{Y_3}\right)^2 \frac{Y_4}{X_4}\frac{Z_4}{X_4}) = \frac{Z_4}{X_4}(W_5 - \left(\frac{X_3}{Y_3}\right)^2 \frac{Y_4}{X_4}Z_5) = 0$ und

$$\begin{aligned} Z_5^2 \cdot \frac{F_4}{X_4^2} \quad = \quad & \left(\frac{Z_4}{X_4}\right)^2 (Y_5Z_5 + a_{1,1}\frac{Z_4}{X_4}X_5Y_5 + a_{3,3}\left(\frac{Z_4}{X_4}\right)^2 X_5Y_5 - \frac{Y_4}{X_4}X_5^2 - \\ & - a_{2,2}\frac{Y_4}{X_4}\frac{Z_4}{X_4}X_5^2 - a_{4,4}\frac{Y_4}{X_4}\left(\frac{Z_4}{X_4}\right)^2 X_5^2 - a_{6,5}Z_5^2) = 0. \end{aligned}$$

Falls $\frac{Z_4}{X_4} = 0$, so folgt $\frac{X_3}{Y_3} = \frac{Y_4}{X_4} = \pi = 0$ und der Punkt liegt nicht in der Menge $\phi^{-1}(\mathcal{V}_4 - \{(\frac{X_3}{Y_3}, \frac{Y_4}{X_4}, \frac{Z_4}{X_4}, \pi)\})$.

Also bleibt nur $W_5 = \left(\frac{X_3}{Y_3}\right)^2 \frac{Y_4}{X_4} Z_5$ und $F_5^* = 0$.

Man bekommt also $\mathcal{V}_5$ durch das Ideal $(W_5 - \left(\frac{X_3}{Y_3}\right)^2 \frac{Y_4}{X_4} Z_5,\ F_5^*)$ in **Proj** $\mathcal{S}$. Dabei gilt

$$\begin{aligned}
X_5\pi - W_5\frac{X_3}{Y_3} &= X_5\pi - Z_5\left(\frac{X_3}{Y_3}\right)^3\frac{Y_4}{X_4} &&= X_5(\pi - \left(\frac{X_3}{Y_3}\right)^2\frac{Y_4}{X_4}\frac{Z_4}{X_4}),\\
Y_5\pi - W_5\frac{Y_4}{X_4} &= Y_5\pi - Z_5\left(\frac{X_3}{Y_3}\right)^2\left(\frac{Y_4}{X_4}\right)^2 &&= Y_5(\pi - \left(\frac{X_3}{Y_3}\right)^2\frac{Y_4}{X_4}\frac{Z_4}{X_4}),\\
Z_5\pi - W_5\frac{Z_4}{X_4} &= &&= Z_5(\pi - \left(\frac{X_3}{Y_3}\right)^2\frac{Y_4}{X_4}\frac{Z_4}{X_4}).
\end{aligned}$$

Da mit $Z_5 = 0$ auch $W_5 = 0$ ist, aber nicht $W_5 = X_5 = Y_5 = Z_5 = 0$ sein kann, folgt daraus, daß $\pi - \left(\frac{X_3}{Y_3}\right)^2 \frac{Y_4}{X_4}\frac{Z_4}{X_4} = 0$ ist. Somit ist $\mathcal{V}_5$ isomorph zu

$$\mathit{Proj}\ R[\frac{X_3}{Y_3}, \frac{Y_4}{X_4}, \frac{Z_4}{X_4}][X_5, Y_5, Z_5]/(I_{X_4},\ \pi - \left(\frac{X_3}{Y_3}\right)^2\frac{Y_4}{X_4}\frac{Z_4}{X_4},\ F_5), \text{ wobei}$$

$$I_{X_4} = (X_5\frac{Y_4}{X_4} - Y_5\frac{X_3}{Y_3},\ X_5\frac{Z_4}{X_4} - Z_5\frac{X_3}{Y_3},\ Y_5\frac{Z_4}{X_4} - Z_5\frac{Y_4}{X_4}) \quad \text{und}$$

$$\begin{aligned}
F_5 \ :=\ & Y_5Z_5 + a_{1,1}\frac{Z_4}{X_4}X_5Y_5 + a_{3,3}\left(\frac{Z_4}{X_4}\right)^2 X_5Y_5 - \frac{Y_4}{X_4}X_5^2 - \\
& - a_{2,2}\frac{Y_4}{X_4}\frac{Z_4}{X_4}X_5^2 - a_{4,4}\frac{Y_4}{X_4}\left(\frac{Z_4}{X_4}\right)^2 X_5^2 - a_{6,5}Z_5^2.
\end{aligned}$$

Ab hier wird die Annahme $\pi^6 \not| a_6$ von Schritt 10 verwendet. Alles bisher Gesagte gilt demnach auch noch in Schritt 11. Insbesondere wird dort das Schema $\mathcal{V}_5$ nocheinmal betrachtet.

$\widetilde{\mathcal{V}}_5$ besteht aus folgenden Komponenten:

$\pi = 0 \Rightarrow \left(\frac{X_3}{Y_3}\right)^2 \frac{Y_4}{X_4}\frac{Z_4}{X_4} = 0$

- $\underline{\frac{X_3}{Y_3} = 0} \Rightarrow X_5\frac{Y_4}{X_4} = X_5\frac{Z_4}{X_4} = 0$. Sei zunächst $\underline{X_5 = 0}$. Daraus folgt wegen $F_5 = 0$, daß $(Y_5 - a_{6,5}Z_5)Z_5 = 0$ ist. Zuerst sei
  - $\underline{Z_5 = 0} \Rightarrow Y_5 \neq 0 \Rightarrow \underline{\frac{Z_4}{X_4}} = 0$. Dies ist die Komponente C_5 von $\mathcal{V}_4$ mit dem Parameter $\frac{Y_4}{X_4}$. Sei nun
  - $\underline{Y_5 - a_{6,5}Z_5 = 0} \Rightarrow Z_5 \neq 0$, da sonst auch $Y_5 = 0$ wäre. Somit folgt noch $\frac{Y_4}{X_4} = \frac{Y_5}{Z_5}\frac{Z_4}{X_4}$, also $\underline{\frac{Y_4}{X_4} - a_{6,5}\frac{Z_4}{X_4} = 0}$. Dies ist die Komponente C_6 von $\mathcal{V}_4$ mit dem Parameter $\frac{Z_4}{X_4}$. Es fehlt noch

- $\underline{\frac{X_3}{Y_3} = \frac{Y_4}{X_4} = \frac{Z_4}{X_4} = 0}$. Daraus folgt wegen $F_5 = 0$, daß $(Y_5 - a_{6,5}Z_5)Z_5 = 0$ ist. Sei zunächst

  * $\underline{Z_5 = 0}$. Diese Komponente ist bei der Aufblasung neu hinzugekommen, sie heiße C_7. Ihr Parameter ist $\frac{X_5}{Y_5}$ beziehungsweise $\frac{Y_5}{X_5}$.
  * $\underline{Y_5 - a_{6,5}Z_5 = 0}$. Auch diese Komponente ist bei der Aufblasung neu hinzugekommen, sie heiße C_8. Ihr Parameter ist $\frac{X_5}{Z_5}$ beziehungsweise $\frac{Z_5}{X_5}$. Nun bleibt noch

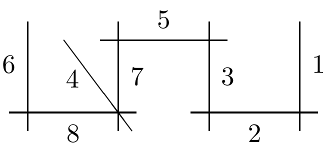
- $\underline{\frac{Y_4}{X_4} = 0} \Rightarrow Y_5\frac{X_3}{Y_3} = Y_5\frac{Z_4}{X_4} = 0$. Den Fall $\frac{X_3}{Y_3} = \frac{Z_4}{X_4} = 0$ haben wir soeben als Komponenten C_7 und C_8 schon behandelt. Deshalb sei jetzt $\underline{Y_5 = 0}$. Aus $F_5 = 0$ folgt dann $\underline{Z_5 = 0} \Rightarrow X_5 \neq 0 \Rightarrow \underline{\frac{Z_4}{X_4} = 0}$. Dies ist die Komponente C_4 von $\mathcal{V}_4$ mit dem Parameter $\frac{X_3}{Y_3}$. Jetzt sei

- $\underline{\frac{Z_4}{X_4} = 0} \Rightarrow Z_5\frac{X_3}{Y_3} = Z_5\frac{Y_4}{X_4} = 0$. Der Fall $\frac{X_3}{Y_3} = \frac{Y_4}{X_4} = 0$ wurde soeben als Komponenten C_7 und C_8 schon behandelt. Deshalb sei jetzt $\underline{Z_5 = 0}$. Aus $F_5 = 0$ folgt dann, daß $\frac{Y_4}{X_4}X_5^2 = 0$ ist. Sei zunächst $\underline{\frac{Y_4}{X_4} = 0} \Rightarrow \frac{X_3}{Y_3}Y_5 = 0$. Zuerst sei

  * $\underline{Y_5 = 0}$. Dies ist wieder die Komponente C_4 mit dem Parameter $\frac{X_3}{Y_3}$.
  * $\underline{\frac{X_3}{Y_3} = 0}$. Dies ist wieder die neue Komponente C_7 mit dem Parameter $\frac{X_5}{Y_5}$ beziehungsweise $\frac{Y_5}{X_5}$. Zuletzt fehlt noch

- $\underline{\frac{Z_4}{X_4} = Z_5 = X_5 = 0} \Rightarrow Y_5 \neq 0 \Rightarrow \underline{\frac{X_3}{Y_3} = 0}$. Dies ist wieder die Komponente C_5.

Die Komponenten sind wie folgt angeordnet:



Die kleinen Zahlen geben dabei die Nummern der Komponenten an.

Sie schneiden sich in den Punkten

$$\begin{aligned}
C_5 \cap C_7 &= \left\{\left(\frac{X_3}{Y_3}, \frac{Y_4}{X_4}, \frac{Z_4}{X_4}, X_5, Z_5, \pi\right)\right\}, \\
C_4 \cap C_7 \cap C_8 &= \left\{\left(\frac{X_3}{Y_3}, \frac{Y_4}{X_4}, \frac{Z_4}{X_4}, Y_5, Z_5, \pi\right)\right\} \quad \text{und} \\
C_6 \cap C_8 &= \left\{\left(\frac{X_3}{Y_3}, \frac{Y_4}{X_4}, \frac{Z_4}{X_4}, X_5, Y_5 - a_{6,5}Z_5, \pi\right)\right\}.
\end{aligned}$$

Wegen $\pi^6 \nmid a_6$ sind die beiden letzteren Schnittpunkte verschieden.

Die Komponenten haben folgende Vielfachheiten:

$\underline{C_5 \text{ ist vierfach.}}$ Denn $\pi = \left(\frac{X_3}{Y_3}\right)^2 \frac{Y_4}{X_4}\frac{Z_4}{X_4}$, $X_5\frac{Y_4}{X_4} = Y_5\frac{X_3}{Y_3}$, $Y_5\frac{Z_4}{X_4} = Z_5\frac{Y_4}{X_4}$ und da $Y_5 \neq 0$ ist und $\frac{Y_4}{X_4}$ auf C_5 nicht identisch verschwindet, gilt $\frac{X_3}{Y_3} \sim X_5$ und $\frac{Z_4}{X_4} \sim Z_5$ im lokalen Ring $\mathcal{O}_{\mathcal{V}_5,\eta}$ des generischen Punktes η von C_5. Aus $F_5 = 0$ folgt

$$Z_5\left(Y_5+a_{1,1}\frac{Y_4}{X_4}X_5+a_{3,3}\frac{Y_4}{X_4}\frac{Z_4}{X_4}X_5-a_{2,2}\frac{X_3}{Y_3}\frac{Y_4}{X_4}X_5-a_{4,4}\left(\frac{X_3}{Y_3}\right)^2\frac{Y_4}{X_4}Z_5-a_{6,5}Z_5\right) = \frac{Y_4}{X_4}X_5^2.$$

Der Term in Klammern auf der linken Seite und der Term $\frac{Y_4}{X_4}$ auf der rechten Seite der Gleichung verschwinden nicht identisch auf C_5 und sind somit Einheiten in $\mathcal{O}_{\mathcal{V}_5,\eta}$. Somit sind $\frac{X_3}{Y_3}$ und X_5 beides Erzeugende des maximalen Ideals von $\mathcal{O}_{\mathcal{V}_5,\eta}$ und sie verschwinden zur Ordnung 1 auf C_5. Deshalb verschwinden Z_5 und $\frac{Z_4}{X_4}$ zur Ordnung 2 auf C_5 und π zur Ordnung 4. Dies bedeutet, daß C_5 vierfach ist.

$\underline{C_6 \text{ ist doppelt.}}$ Denn $\pi = \left(\frac{X_3}{Y_3}\right)^2 \frac{Y_4}{X_4}\frac{Z_4}{X_4}$, $X_5\frac{Z_4}{X_4} = Z_5\frac{X_3}{Y_3}$ und da $Z_5 \neq 0$ ist und $\frac{Z_4}{X_4}$ auf C_6 nicht identisch verschwindet, gilt $\frac{X_3}{Y_3} \sim X_5$ im lokalen Ring $\mathcal{O}_{\mathcal{V}_5,\eta}$ des generischen Punktes η von C_6. Aus $F_5 = 0$ folgt

$$\begin{aligned}(Y_5 - a_{6,5}Z_5)Z_5 &= \\ &= X_5\Big(\frac{Y_4}{X_4}X_5 + a_{2,2}\frac{Y_4}{X_4}\frac{Z_4}{X_4}X_5 + a_{4,4}\frac{Y_4}{X_4}\left(\frac{Z_4}{X_4}\right)^2 X_5 - a_{1,1}\frac{Z_4}{X_4}Y_5 - a_{3,3}\left(\frac{Z_4}{X_4}\right)^2 Y_5\Big).\end{aligned}$$

Der Term Z_5 auf der linken Seite der Gleichung ist $\neq 0$ und somit eine Einheit in $\mathcal{O}_{\mathcal{V}_5,\eta}$. Also liegt $Y_5 - a_{6,5}Z_5$ in dem von $\frac{X_3}{Y_3}$ erzeugten Ideal von $\mathcal{O}_{\mathcal{V}_5,\eta}$. Da $Z_5(\frac{Y_4}{X_4} - a_{6,5}\frac{Z_4}{X_4}) = \frac{Z_4}{X_4}(Y_5 - a_{6,5}Z_5)$ und $Z_5 \neq 0$ ist, folgt daß das maximale Ideal von $\mathcal{O}_{\mathcal{V}_5,\eta}$ von $\frac{X_3}{Y_3}$ erzeugt wird. Da wegen $\tilde{a}_{6,5} \neq 0$ auch $\frac{Y_4}{X_4}$ eine Einheit in $\mathcal{O}_{\mathcal{V}_5,\eta}$ ist, ist die Ordnung von π auf C_6 gleich 2. Dies bedeutet, daß C_6 doppelt ist.

5.12.4 Die singulären Punkte von $\mathcal{V}_5$

Da $\mathbf{A}^3_R \times_{Spec\, R} \mathbf{P}^2_R$ ein reguläres sechsdimensionales Schema ist, wird das maximale Ideal des lokalen Ringes eines jeden abgeschlossenen Punktes von sechs Elementen erzeugt. Somit werden auch auf dem Unterschema $\mathcal{V}_5$ höchstens sechs Elemente zum Erzeugen des maximalen Ideals eines abgeschlossenen Punktes benötigt.

Sei nun $P \in \widetilde{\mathcal{V}}_5$ ein abgeschlossener Punkt und $\mathcal{M}$ das maximale Ideal in $\mathcal{O}_{\mathcal{V}_5,P}$.

$\underline{\text{Auf } \mathcal{V}_5 - (C_7 \cup C_8)}$ liegen keine singulären Punkte,
da $\mathcal{V}_5 - (C_7 \cup C_8) \cong \mathcal{V}_4 - \{(\frac{X_3}{Y_3}, \frac{Y_4}{X_4}, \frac{Z_4}{X_4}, \pi)\}$ und somit regulär ist.

$\underline{P \in C_7 - (C_4 \cap C_8)}$:
dann ist $\mathcal{M} = (\frac{X_3}{Y_3}, \frac{Y_4}{X_4}, \frac{Z_4}{X_4}, p(X_5, Y_5), Z_5, \pi)$. Es ist $Y_5,\ Y_5 - a_{6,5}Z_5 \notin \mathcal{M}$, da $P \neq C_4 \cap C_8$ und damit gilt $\pi = \left(\frac{X_3}{Y_3}\right)^2 \frac{Y_4}{X_4}\frac{Z_4}{X_4}$, $\frac{X_3}{Y_3} = \frac{X_5}{Y_5}\frac{Y_4}{X_4}$, $\frac{Z_4}{X_4} = \frac{Z_5}{Y_5}\frac{Y_4}{X_4}$ und

$$\begin{aligned}Z_5 &= \frac{1}{Y_5 - a_{6,5}Z_5}\left(\frac{Y_4}{X_4}X_5^2 + a_{2,2}\frac{Y_4}{X_4}\frac{Z_4}{X_4}X_5^2 + a_{4,4}\frac{Y_4}{X_4}\left(\frac{Z_4}{X_4}\right)^2 X_5^2 - \right.\\ &\qquad \left. - a_{1,1}\frac{Z_4}{X_4}X_5Y_5 - a_{3,3}\left(\frac{Z_4}{X_4}\right)^2 X_5Y_5\right).\end{aligned}$$

Das bedeutet $\mathcal{M} = (\frac{Y_4}{X_4}, p)$ und P ist regulär.

<u>$P \in C_8 - (C_4 \cap C_7)$:</u>
dann ist $\mathcal{M} = (\frac{X_3}{Y_3}, \frac{Y_4}{X_4}, \frac{Z_4}{X_4}, p(X_5, Z_5), Y_5 - a_{6,5}Z_5, \pi)$. Es ist $Z_5 \notin \mathcal{M}$, denn sonst wäre auch $Y_5 \in \mathcal{M}$ und damit $P = C_4 \cap C_7$. Also gilt $\pi = \left(\frac{X_3}{Y_3}\right)^2 \frac{Y_4}{X_4}\frac{Z_4}{X_4}$, $\frac{X_3}{Y_3} = \frac{X_5}{Z_5}\frac{Z_4}{X_4}$, $\frac{Y_4}{X_4} = \frac{Y_5}{Z_5}\frac{Z_4}{X_4}$ und

$$\begin{aligned} Y_5 - a_{6,5}Z_5 &= \frac{1}{Z_5}\Bigg(\frac{Y_4}{X_4}X_5^2 + a_{2,2}\frac{Y_4}{X_4}\frac{Z_4}{X_4}X_5^2 + a_{4,4}\frac{Y_4}{X_4}\left(\frac{Z_4}{X_4}\right)^2 X_5^2 - \\ &\qquad - a_{1,1}\frac{Z_4}{X_4}X_5Y_5 - a_{3,3}\left(\frac{Z_4}{X_4}\right)^2 X_5Y_5\Bigg). \end{aligned}$$

Das bedeutet $\mathcal{M} = (\frac{Z_4}{X_4}, p)$ und P ist regulär.

<u>Der Punkt $P = C_4 \cap C_7 \cap C_8$</u> ist singulär,
denn dort ist $\mathcal{M} = (\frac{X_3}{Y_3}, \frac{Y_4}{X_4}, \frac{Z_4}{X_4}, Y_5, Z_5, \pi)$ und deshalb $X_5 \notin \mathcal{M}$. Die drei Erzeuger von I_{X_4}, sowie $\pi - \left(\frac{X_3}{Y_3}\right)^2 \frac{Y_4}{X_4}\frac{Z_4}{X_4}$ und F_5 mod $\mathcal{M}^2$ ergeben

$$\frac{Y_4}{X_4} \equiv 0, \quad \frac{Z_4}{X_4} \equiv 0, \quad 0 \equiv 0, \quad \pi \equiv 0, \quad \text{und} \quad \frac{Y_4}{X_4} \equiv 0 \mod \mathcal{M}^2.$$

Dies bedeutet, daß $\frac{X_3}{Y_3}$, Y_5, Z_5 mod $\mathcal{M}^2$ in keiner Relation stehen und linear unabhängig über $k = \mathcal{O}_{\mathcal{V}_5,P}/\mathcal{M}$ sind. Also ist P singulär und wird als nächstes aufgeblasen.

Dazu betrachte man das offene Unterschema von $\mathcal{V}_5$

$$\begin{aligned} P \in \mathcal{V}_5 - \overline{\{(X_5)\}} &= Spec\ R[\frac{X_3}{Y_3}, \frac{Y_4}{X_4}, \frac{Z_4}{X_4}, \frac{Y_5}{X_5}, \frac{Z_5}{X_5}]/(I_{X_4}, \pi - \left(\frac{X_3}{Y_3}\right)^2 \frac{Y_4}{X_4}\frac{Z_4}{X_4}, F_5) \\ &\cong Spec\ R[\frac{X_3}{Y_3}, \frac{Y_5}{X_5}, \frac{Z_5}{X_5}]/(\pi - \left(\frac{X_3}{Y_3}\right)^4 \frac{Y_5}{X_5}\frac{Z_5}{X_5}, \frac{1}{X_5^2}F_5), \end{aligned}$$

wobei $\frac{1}{X_5^2}F_5 = \frac{Y_5}{X_5}\frac{Z_5}{X_5} + a_{1,1}\frac{X_3}{Y_3}\frac{Y_5}{X_5}\frac{Z_5}{X_5} + a_{3,3}\left(\frac{X_3}{Y_3}\right)^2 \frac{Y_5}{X_5}\left(\frac{Z_5}{X_5}\right)^2 - \frac{X_3}{Y_3}\frac{Y_5}{X_5} - a_{2,2}\left(\frac{X_3}{Y_3}\right)^2 \frac{Y_5}{X_5}\frac{Z_5}{X_5} - a_{4,4}\left(\frac{X_3}{Y_3}\right)^3 \frac{Y_5}{X_5}\left(\frac{Z_5}{X_5}\right)^2 - a_{6,5}\left(\frac{Z_5}{X_5}\right)^2$ ist.

P ist dort gegeben durch $(\frac{X_3}{Y_3}, \frac{Y_5}{X_5}, \frac{Z_5}{X_5}, \pi)$.

5.12.5 Aufblasen von $\mathcal{V}_5$ entlang $(\frac{X_3}{Y_3}, \frac{Y_5}{X_5}, \frac{Z_5}{X_5}, \pi)$

$$\mathcal{I} = (\pi, \frac{X_3}{Y_3}, \frac{Y_5}{X_5}, \frac{Z_5}{X_5}), \qquad \mathcal{S} = \bigoplus_{d \geq 0} \mathcal{I}^d$$

Man hat die surjektive Abbildung $R[\frac{X_3}{Y_3}, \frac{Y_5}{X_5}, \frac{Z_5}{X_5}][W_6, X_6, Y_6, Z_6] \to \mathcal{S}$ durch die Zuordnung $(W_6, X_6, Y_6, Z_6) \mapsto (\pi, \frac{X_3}{Y_3}, \frac{Y_5}{X_5}, \frac{Z_5}{X_5})$.

Ihr Kern ist $I^*_{X_5} = (W_6\frac{X_3}{Y_3} - X_6\pi,\ W_6\frac{Y_5}{X_5} - Y_6\pi,\ W_6\frac{Z_5}{X_5} - Z_6\pi,\ X_6\frac{Y_5}{X_5} - Y_6\frac{X_3}{Y_3},$
$X_6\frac{Z_5}{X_5} - Z_6\frac{X_3}{Y_3},\ Y_6\frac{Z_5}{X_5} - Z_6\frac{Y_5}{X_5}).$

Also ergibt sich $\mathcal{S} \cong R\,[\frac{X_3}{Y_3}, \frac{Y_5}{X_5}, \frac{Z_5}{X_5}][W_6, X_6, Y_6, Z_6]/I^*_{X_5}$.

$\phi : Proj\ \ \mathcal{S} \to \mathbf{A}^3_R$ ist gegeben durch $R\,[\frac{X_3}{Y_3}, \frac{Y_5}{X_5}, \frac{Z_5}{X_5}] \to \mathcal{S}$.

Die strikte Transformation von $\mathcal{V}_5$ erhält man gemäß Satz 2.32 als den Abschluß

$\mathcal{V}_6 := \overline{\phi^{-1}(\mathcal{V}_5 - \{(\frac{X_3}{Y_3}, \frac{Y_5}{X_5}, \frac{Z_5}{X_5}, \pi)\})}$ in $\mathbf{Proj}\ \mathcal{S}$.

Dabei ist $\mathcal{V}_6$ durch folgende Gleichungen gegeben:

In $W_6 \neq 0:\quad \Rightarrow\quad \frac{X_3}{Y_3} = \frac{X_6}{W_6}\pi,\ \frac{Y_5}{X_5} = \frac{Y_6}{W_6}\pi$ und $\frac{Z_5}{X_5} = \frac{Z_6}{W_6}\pi$.

Damit ist $W_6 \cdot (\pi - \left(\frac{X_3}{Y_3}\right)^4 \frac{Y_5}{X_5}\frac{Z_5}{X_5}) = \pi(W_6 - \left(\frac{X_3}{Y_3}\right)^4 \frac{Y_5}{X_5}Z_6) = 0$ und

$$\begin{aligned} W_6^2 \cdot \frac{F_5}{X_5^2} \quad &= \quad \pi^2(Y_6Z_6 + a_{1,1}\frac{X_3}{Y_3}Y_6Z_6 + a_{3,3}\left(\frac{X_3}{Y_3}\right)^2 \frac{Y_5}{X_5}Z_6^2 - X_6Y_6 - \\ &\quad - a_{2,2}\left(\frac{X_3}{Y_3}\right)^2 Y_6Z_6 - a_{4,4}\left(\frac{X_3}{Y_3}\right)^3 \frac{Y_5}{X_5}Z_6^2 - a_{6,5}Z_6^2) = 0. \end{aligned}$$

Falls $\pi = 0$ ist, so folgt $\frac{X_3}{Y_3} = \frac{Y_5}{X_5} = \frac{Z_5}{X_5} = 0$ und der Punkt gehört nicht zu $\phi^{-1}(\mathcal{V}_5 - \{(\frac{X_3}{Y_3}, \frac{Y_5}{X_5}, \frac{Z_5}{X_5}, \pi)\})$.

Also bleibt nur $W_6 = \left(\frac{X_3}{Y_3}\right)^4 \frac{Y_5}{X_5}Z_6$ und

$$\begin{aligned} F_6^* \quad &:= \quad Y_6Z_6 + a_{1,1}\frac{X_3}{Y_3}Y_6Z_6 + a_{3,3}\left(\frac{X_3}{Y_3}\right)^2 \frac{Y_5}{X_5}Z_6^2 - X_6Y_6 - \\ &\quad - a_{2,2}\left(\frac{X_3}{Y_3}\right)^2 Y_6Z_6 - a_{4,4}\left(\frac{X_3}{Y_3}\right)^3 \frac{Y_5}{X_5}Z_6^2 - a_{6,5}Z_6^2 \quad = \quad 0. \end{aligned}$$

In $X_6 \neq 0:\quad \Rightarrow\quad \pi = \frac{W_6}{X_6}\frac{X_3}{Y_3},\ \frac{Y_5}{X_5} = \frac{Y_6}{X_6}\frac{X_3}{Y_3}$ und $\frac{Z_5}{X_5} = \frac{Z_6}{X_6}\frac{X_3}{Y_3}$.

Damit ist $X_6 \cdot (\pi - \left(\frac{X_3}{Y_3}\right)^4 \frac{Y_5}{X_5}\frac{Z_5}{X_5}) = \frac{X_3}{Y_3}(W_6 - \left(\frac{X_3}{Y_3}\right)^4 \frac{Y_5}{X_5}Z_6) = 0$ und

$$\begin{aligned} X_6^2 \cdot \frac{F_5}{X_5^2} \quad &= \quad \left(\frac{X_3}{Y_3}\right)^2 (Y_6Z_6 + a_{1,1}\frac{X_3}{Y_3}Y_6Z_6 + a_{3,3}\left(\frac{X_3}{Y_3}\right)^2 \frac{Y_5}{X_5}Z_6^2 - X_6Y_6 - \\ &\quad - a_{2,2}\left(\frac{X_3}{Y_3}\right)^2 Y_6Z_6 - a_{4,4}\left(\frac{X_3}{Y_3}\right)^3 \frac{Y_5}{X_5}Z_6^2 - a_{6,5}Z_6^2) = 0. \end{aligned}$$

Falls $\frac{X_3}{Y_3} = 0$ ist, so folgt $\frac{Y_5}{X_5} = \frac{Z_5}{X_5} = \pi = 0$ und der Punkt gehört nicht zu $\phi^{-1}(\mathcal{V}_5 - \{(\frac{X_3}{Y_3}, \frac{Y_5}{X_5}, \frac{Z_5}{X_5}, \pi)\})$.

Also bleibt nur $W_6 = \left(\frac{X_3}{Y_3}\right)^4 \frac{Y_5}{X_5}Z_6$ und $F_6^* = 0$.

In $Y_6 \neq 0:$ $\quad\Rightarrow\quad \pi = \frac{W_6}{Y_6}\frac{Y_5}{X_5},\ \frac{X_3}{Y_3} = \frac{X_6}{Y_6}\frac{Y_5}{X_5}$ und $\frac{Z_5}{X_5} = \frac{Z_6}{Y_6}\frac{Y_5}{X_5}$.

Damit ist $Y_6 \cdot (\pi - \left(\frac{X_3}{Y_3}\right)^4 \frac{Y_5}{X_5}\frac{Z_5}{X_5}) = \frac{Y_5}{X_5}(W_6 - \left(\frac{X_3}{Y_3}\right)^4 \frac{Y_5}{X_5} Z_6) = 0$ und

$$\begin{aligned} Y_6^2 \cdot \frac{F_5}{X_5^2} &= \left(\frac{Y_5}{X_5}\right)^2 (Y_6Z_6 + a_{1,1}\frac{X_3}{Y_3}Y_6Z_6 + a_{3,3}\left(\frac{X_3}{Y_3}\right)^2 \frac{Y_5}{X_5} Z_6^2 - X_6Y_6 - \\ &\quad - a_{2,2}\left(\frac{X_3}{Y_3}\right)^2 Y_6Z_6 - a_{4,4}\left(\frac{X_3}{Y_3}\right)^3 \frac{Y_5}{X_5} Z_6^2 - a_{6,5}Z_6^2) = 0. \end{aligned}$$

Falls $\frac{Y_5}{X_5} = 0$ ist, so folgt $\frac{X_3}{Y_3} = \frac{Z_5}{X_5} = \pi = 0$ und der Punkt gehört nicht zu $\phi^{-1}(\mathcal{V}_5 - \{(\frac{X_3}{Y_3}, \frac{Y_5}{X_5}, \frac{Z_5}{X_5}, \pi)\})$.

Also bleibt nur $W_6 = \left(\frac{X_3}{Y_3}\right)^4 \frac{Y_5}{X_5} Z_6$ und $F_6^* = 0$.

In $Z_6 \neq 0:$ $\quad\Rightarrow\quad \pi = \frac{W_6}{Z_6}\frac{Z_5}{X_5},\ \frac{X_3}{Y_3} = \frac{X_6}{Z_6}\frac{Z_5}{X_5}$ und $\frac{Y_5}{X_5} = \frac{Y_6}{Z_6}\frac{Z_5}{X_5}$.

Damit ist $Z_6 \cdot (\pi - \left(\frac{X_3}{Y_3}\right)^4 \frac{Y_5}{X_5}\frac{Z_5}{X_5}) = \frac{Z_5}{X_5}(W_6 - \left(\frac{X_3}{Y_3}\right)^4 \frac{Y_5}{X_5} Z_6) = 0$ und

$$\begin{aligned} Z_6^2 \cdot \frac{F_5}{X_5^2} &= \left(\frac{Z_5}{X_5}\right)^2 (Y_6Z_6 + a_{1,1}\frac{X_3}{Y_3}Y_6Z_6 + a_{3,3}\left(\frac{X_3}{Y_3}\right)^2 \frac{Y_5}{X_5} Z_6^2 - X_6Y_6 - \\ &\quad - a_{2,2}\left(\frac{X_3}{Y_3}\right)^2 Y_6Z_6 - a_{4,4}\left(\frac{X_3}{Y_3}\right)^3 \frac{Y_5}{X_5} Z_6^2 - a_{6,5}Z_6^2) = 0. \end{aligned}$$

Falls $\frac{Z_5}{X_5} = 0$ ist, so folgt $\frac{X_3}{Y_3} = \frac{Y_5}{X_5} = \pi = 0$ und der Punkt gehört nicht zu $\phi^{-1}(\mathcal{V}_5 - \{(\frac{X_3}{Y_3}, \frac{Y_5}{X_5}, \frac{Z_5}{X_5}, \pi)\})$.

Also bleibt nur $W_6 = \left(\frac{X_3}{Y_3}\right)^4 \frac{Y_5}{X_5} Z_6$ und $F_6^* = 0$.

Man bekommt also $\mathcal{V}_5$ durch das Ideal $(W_6 - \left(\frac{X_3}{Y_3}\right)^4 \frac{Y_5}{X_5} Z_6,\ F_6^*)$ in **Proj** $\mathcal{S}$. Dabei gilt

$$\begin{aligned} X_6\pi - W_6\frac{X_3}{Y_3} &= X_6\pi - Z_6\left(\frac{X_3}{Y_3}\right)^5 \frac{Y_5}{X_5} &&= X_6(\pi - \left(\frac{X_3}{Y_3}\right)^4 \frac{Y_5}{X_5}\frac{Z_5}{X_5}), \\ Y_6\pi - W_6\frac{Y_5}{X_5} &= Y_6\pi - Z_6\left(\frac{X_3}{Y_3}\right)^4 \left(\frac{Y_5}{X_5}\right)^2 &&= Y_6(\pi - \left(\frac{X_3}{Y_3}\right)^4 \frac{Y_5}{X_5}\frac{Z_5}{X_5}), \\ Z_6\pi - W_6\frac{Z_5}{X_5} &= &&= Z_6(\pi - \left(\frac{X_3}{Y_3}\right)^4 \frac{Y_5}{X_5}\frac{Z_5}{X_5}). \end{aligned}$$

Da mit $Z_6 = 0$ auch $W_6 = 0$ ist, aber nicht $W_6 = X_6 = Y_6 = Z_6 = 0$ sein kann, folgt daraus, daß $\pi - \left(\frac{X_3}{Y_3}\right)^4 \frac{Y_5}{X_5}\frac{Z_5}{X_5} = 0$ ist. Somit ist $\mathcal{V}_6$ isomorph zu

$$\mathit{Proj}\ R[\frac{X_3}{Y_3}, \frac{Y_5}{X_5}, \frac{Z_5}{X_5}][X_6, Y_6, Z_6]/(I_{X_5},\ \pi - \left(\frac{X_3}{Y_3}\right)^4 \frac{Y_5}{X_5}\frac{Z_5}{X_5},\ F_6), \text{ wobei}$$

$$I_{X_5} = (X_6\frac{Y_5}{X_5} - Y_6\frac{X_3}{Y_3},\ X_6\frac{Z_5}{X_5} - Z_6\frac{X_3}{Y_3},\ Y_6\frac{Z_5}{X_5} - Z_6\frac{Y_5}{X_5}) \quad \text{und}$$

$$\begin{aligned} F_6 \quad := \quad & Y_6Z_6 + a_{1,1}\frac{X_3}{Y_3}Y_6Z_6 + a_{3,3}\left(\frac{X_3}{Y_3}\right)^2 \frac{Y_5}{X_5}Z_6^2 - X_6Y_6 - \\ & - a_{2,2}\left(\frac{X_3}{Y_3}\right)^2 Y_6Z_6 - a_{4,4}\left(\frac{X_3}{Y_3}\right)^3 \frac{Y_5}{X_5}Z_6^2 - a_{6,5}Z_6^2. \end{aligned}$$

$\widetilde{\mathcal{V}}_6$ besteht aus folgenden Komponenten:

$\pi = 0 \Rightarrow \left(\frac{X_3}{Y_3}\right)^4 \frac{Y_5}{X_5}\frac{Z_5}{X_5} = 0$

- $\underline{\frac{X_3}{Y_3} = 0} \Rightarrow X_6\frac{Y_5}{X_5} = X_6\frac{Z_5}{X_5} = 0$. Sei zunächst $\underline{X_6 = 0}$. Daraus folgt wegen $F_6 = 0$, daß $(Y_6 - a_{6,5}Z_6)Z_6 = 0$ ist. Zuerst sei
  - $\underline{Z_6 = 0} \Rightarrow Y_6 \neq 0 \Rightarrow \underline{\frac{Z_5}{X_5}} = 0$. Dies ist die Komponente C_7 von $\mathcal{V}_5$ mit dem Parameter $\frac{Y_5}{X_5}$. Sei nun
  - $\underline{Y_6 - a_{6,5}Z_6 = 0} \Rightarrow Z_6 \neq 0$, da sonst auch $Y_6 = 0$ wäre. Somit folgt noch $\frac{Y_5}{X_5} = \frac{Y_6}{Z_6}\frac{Z_5}{X_5}$, also $\underline{\frac{Y_5}{X_5} - a_{6,5}\frac{Z_5}{X_5} = 0}$. Dies ist die Komponente C_8 von $\mathcal{V}_5$ mit dem Parameter $\frac{Z_5}{X_5}$. Es fehlt noch
- $\underline{\frac{X_3}{Y_3} = \frac{Y_5}{X_5} = \frac{Z_5}{X_5} = 0}$. Daraus folgt wegen $F_5 = 0$, daß $\underline{Y_6Z_6 - X_6Y_6 - a_{6,5}Z_6^2 = 0}$ ist. Diese Komponente ist bei der Aufblasung neu hinzugekommen, sie ist irreduzibel und heiße C_9.
- $\underline{\frac{Y_5}{X_5} = 0} \Rightarrow Y_6\frac{X_3}{Y_3} = Y_6\frac{Z_5}{X_5} = 0$. Den Fall $\frac{X_3}{Y_3} = \frac{Z_5}{X_5} = 0$ haben wir soeben als Komponente C_9 schon behandelt. Deshalb sei jetzt $\underline{Y_6 = 0}$. Wegen $F_6 = 0$ folgt daraus $\underline{Z_6 = 0} \Rightarrow X_6 \neq 0 \Rightarrow \underline{\frac{Z_5}{X_5} = 0}$. Dies ist die Komponente C_4 von $\mathcal{V}_5$ mit dem Parameter $\frac{X_3}{Y_3}$. Jetzt sei
- $\underline{\frac{Z_5}{X_5} = 0} \Rightarrow Z_6\frac{X_3}{Y_3} = Z_6\frac{Y_5}{X_5} = 0$. Der Fall $\frac{X_3}{Y_3} = \frac{Y_5}{X_5} = 0$ wurde soeben als Komponente C_9 schon behandelt. Deshalb sei jetzt $\underline{Z_6 = 0}$. Wegen $F_6 = 0$ folgt daraus, daß $X_6Y_6 = 0$ ist. Sei zunächst $\underline{X_6 = 0} \Rightarrow Y_6 \neq 0 \Rightarrow \underline{\frac{X_3}{Y_3} = 0}$. Dies ist wieder die Komponente C_7 mit dem Parameter $\frac{Y_5}{X_5}$. Zuletzt fehlt noch
- $\underline{\frac{Z_5}{X_5} = Z_6 = Y_6 = 0} \Rightarrow X_6 \neq 0 \Rightarrow \underline{\frac{Y_5}{X_5} = 0}$. Dies ist wieder die Komponente C_4.

Die Komponenten schneiden sich in den Punkten

$$\begin{aligned} C_7 \cap C_9 \quad &= \quad \left\{\left(\frac{X_3}{Y_3}, \frac{Y_5}{X_5}, \frac{Z_5}{X_5}, X_6, Z_6, \pi\right)\right\}, \\ C_4 \cap C_9 \quad &= \quad \left\{\left(\frac{X_3}{Y_3}, \frac{Y_5}{X_5}, \frac{Z_5}{X_5}, Y_6, Z_6, \pi\right)\right\} \quad \text{und} \\ C_8 \cap C_9 \quad &= \quad \left\{\left(\frac{X_3}{Y_3}, \frac{Y_5}{X_5}, \frac{Z_5}{X_5}, X_6, Y_6 - a_{6,5}Z_6, \pi\right)\right\}. \end{aligned}$$

Sie haben folgende Vielfachheiten:

C_7 ist fünffach. Denn $\pi = \left(\frac{X_3}{Y_3}\right)^4 \frac{Y_5}{X_5}\frac{Z_5}{X_5}$, $X_6\frac{Y_5}{X_5} = Y_6\frac{X_3}{Y_3}$, $Y_6\frac{Z_5}{X_5} = Z_6\frac{Y_5}{X_5}$ und da $Y_6 \neq 0$ ist und $\frac{Y_5}{X_5}$ auf C_7 nicht identisch verschwindet, gilt $\frac{X_3}{Y_3} \sim X_6$ und $\frac{Z_5}{X_5} \sim Z_6$ im lokalen Ring $\mathcal{O}_{\mathcal{V}_6,\eta}$ des generischen Punktes η von C_7. Aus $F_6 = 0$ folgt

$$\begin{aligned} X_6Y_6 \quad = \quad & Z_6\Big(Y_6 + a_{1,1}\frac{X_3}{Y_3}Y_6 + a_{3,3}\left(\frac{X_3}{Y_3}\right)^2\frac{Y_5}{X_5}Z_6 - \\ & - a_{2,2}\left(\frac{X_3}{Y_3}\right)^2 Y_6 - a_{4,4}\left(\frac{X_3}{Y_3}\right)^3\frac{Y_5}{X_5}Z_6 - a_{6,5}Z_6\Big). \end{aligned}$$

Der Term in Klammern auf der linken Seite und der Term Y_6 auf der rechten Seite der Gleichung sind auf C_4 ungleich Null und somit Einheiten in $\mathcal{O}_{\mathcal{V}_6,\eta}$. Somit ist $\frac{X_3}{Y_3} \sim \frac{Z_5}{X_5} \sim X_6 \sim Z_6$ und alle vier sind Erzeugende des maximalen Ideals von $\mathcal{O}_{\mathcal{V}_6,\eta}$ und verschwinden zur Ordnung 1 auf C_7. Deshalb verschwindet π zur Ordnung 5. Dies bedeutet, daß C_7 fünffach ist.

C_9 ist sechsfach. Denn $\pi = \left(\frac{X_3}{Y_3}\right)^4 \frac{Y_5}{X_5}\frac{Z_5}{X_5}$, $X_6\frac{Y_5}{X_5} = Y_6\frac{X_3}{Y_3}$, $X_6\frac{Z_5}{X_5} = Z_6\frac{X_3}{Y_3}$ und da X_6, Y_6 und Z_6 auf C_9 nicht identisch verschwinden, gilt $\frac{X_3}{Y_3} \sim \frac{Y_5}{X_5} \sim \frac{Z_5}{X_5}$ im lokalen Ring $\mathcal{O}_{\mathcal{V}_6,\eta}$ des generischen Punktes η von C_9. Aus $F_6 = 0$ folgt

$$Y_6Z_6 - X_6Y_6 - a_{6,5}Z_6^2 \quad = \quad \frac{X_3}{Y_3}\Big(a_{2,2}\frac{X_3}{Y_3}Y_6Z_6 + a_{4,4}\left(\frac{X_3}{Y_3}\right)^2\frac{Y_5}{X_5}Z_6^2 - a_{1,1}Y_6Z_6 - a_{3,3}\frac{X_3}{Y_3}\frac{Y_5}{X_5}Z_6^2\Big).$$

Somit sind $\frac{X_3}{Y_3}, \frac{Y_5}{X_5}$ und $\frac{Z_5}{X_5}$ alle drei Erzeugende des maximalen Ideals von $\mathcal{O}_{\mathcal{V}_6,\eta}$ und sie verschwinden zur Ordnung 1 auf C_9. Deshalb verschwindet π zur Ordnung 6. Dies bedeutet, daß C_9 sechsfach ist.

C_4 ist dreifach. Denn $\pi = \left(\frac{X_3}{Y_3}\right)^4 \frac{Y_5}{X_5}\frac{Z_5}{X_5}$, $X_6\frac{Y_5}{X_5} = Y_6\frac{X_3}{Y_3}$, $X_6\frac{Z_5}{X_5} = Z_6\frac{X_3}{Y_3}$ und da $X_6 \neq 0$ ist und $\frac{X_3}{Y_3}$ auf C_4 nicht identisch verschwindet, gilt $\frac{Y_5}{X_5} \sim Y_6$ und $\frac{Z_5}{X_5} \sim Z_6$ im lokalen Ring $\mathcal{O}_{\mathcal{V}_6,\eta}$ des generischen Punktes η von C_4. Aus $F_6 = 0$ folgt

$$Y_6\Big(X_6 - Z_6 - a_{1,1}\frac{X_3}{Y_3}Z_6 + a_{2,2}\left(\frac{X_3}{Y_3}\right)^2 Z_6\Big) \quad = \quad Z_6^2\Big(a_{3,3}\left(\frac{X_3}{Y_3}\right)^2\frac{Y_5}{X_5} - a_{4,4}\left(\frac{X_3}{Y_3}\right)^3\frac{Y_5}{X_5} - a_{6,5}\Big).$$

Die Terme in Klammern auf beiden Seiten der Gleichung sind wegen $\tilde{a}_{6,5} \neq 0$ auf C_4 ungleich Null und somit Einheiten in $\mathcal{O}_{\mathcal{V}_6,\eta}$. Somit sind $\frac{Z_5}{X_5}$ und Z_6 beides Erzeugende des maximalen Ideals von $\mathcal{O}_{\mathcal{V}_6,\eta}$ und sie verschwinden zur Ordnung 1 auf C_4. Deshalb verschwinden Y_6 und $\frac{Y_5}{X_5}$ zur Ordnung 2 auf C_4 und π zur Ordnung 3. Dies bedeutet, daß C_4 dreifach ist.

C_8 ist vierfach. Denn $\pi = \left(\frac{X_3}{Y_3}\right)^4 \frac{Y_5}{X_5}\frac{Z_5}{X_5}$, $X_6\frac{Z_5}{X_5} = Z_6\frac{X_3}{Y_3}$ und da $Z_6 \neq 0$ ist und $\frac{Z_5}{X_5}$ auf C_8 nicht identisch verschwindet, gilt $\frac{X_3}{Y_3} \sim X_6$ im lokalen Ring $\mathcal{O}_{\mathcal{V}_6,\eta}$ des generischen Punktes η von C_8. Aus $F_6 = 0$ folgt

$$(Y_6 - a_{6,5}Z_6)Z_6 = X_6Y_6 + \frac{X_3}{Y_3}\Big(a_{2,2}\frac{X_3}{Y_3}Y_6Z_6 + a_{4,4}\left(\frac{X_3}{Y_3}\right)^2\frac{Y_5}{X_5}Z_6^2 - a_{1,1}Y_6Z_6 - a_{3,3}\frac{X_3}{Y_3}\frac{Y_5}{X_5}Z_6^2\Big).$$

Der Term Z_6 auf der linken Seite der Gleichung ist eine Einheit in $\mathcal{O}_{\mathcal{V}_6,\eta}$. Somit liegt $Y_6 - a_{6,5}Z_6$ in dem von $\frac{X_3}{Y_3}$ erzeugten Ideal von $\mathcal{O}_{\mathcal{V}_6,\eta}$. Da $Z_6(\frac{Y_5}{X_5} - a_{6,5}\frac{Z_5}{X_5}) = \frac{Z_5}{X_5}(Y_6 - a_{6,5}Z_6)$ und $Z_6 \neq 0$ ist, folgt daß das maximale Ideal von $\mathcal{O}_{\mathcal{V}_6,\eta}$ von $\frac{X_3}{Y_3}$ erzeugt wird. Da wegen $\tilde{a}_{6,5} \neq 0$ auch $\frac{Y_5}{X_5}$ eine Einheit in $\mathcal{O}_{\mathcal{V}_6,\eta}$ ist, ist die Ordnung von π auf C_8 gleich 4. Dies bedeutet, daß C_8 vierfach ist.

5.12.6 Die singulären Punkte von $\mathcal{V}_6$

Da $\mathbf{A}^3_R \times_{Spec\,R} \mathbf{P}^2_R$ ein reguläres sechsdimensionales Schema ist, wird das maximale Ideal des lokalen Ringes eines jeden abgeschlossenen Punktes von sechs Elementen erzeugt. Somit werden auch auf dem Unterschema $\mathcal{V}_6$ höchstens sechs Elemente zum Erzeugen des maximalen Ideals eines abgeschlossenen Punktes benötigt.

Sei nun $P \in \widetilde{\mathcal{V}}_6$ ein abgeschlossener Punkt und $\mathcal{M}$ das maximale Ideal in $\mathcal{O}_{\mathcal{V}_6,P}$.

<u>Auf $\mathcal{V}_6 - C_9$</u> liegen keine singulären Punkte, da $\mathcal{V}_6 - C_9 \cong \mathcal{V}_6 - \{(\frac{X_3}{Y_3}, \frac{Y_5}{X_5}, \frac{Z_5}{X_5}, \pi)\}$ und somit regulär ist.

<u>$P = C_9 \cap C_4$:</u>
dann ist $\mathcal{M} = (\frac{X_3}{Y_3}, \frac{Y_5}{X_5}, \frac{Z_5}{X_5}, Y_6, Z_6, \pi)$. Es ist $X_6 \notin \mathcal{M}$ und damit gilt $\pi = \left(\frac{X_3}{Y_3}\right)^4 \frac{Y_5}{X_5}\frac{Z_5}{X_5}$, $\frac{Y_5}{X_5} = \frac{Y_6}{X_6}\frac{X_3}{Y_3}$, $\frac{Z_5}{X_5} = \frac{Z_6}{X_6}\frac{X_3}{Y_3}$ und

$$\begin{aligned} Y_6 &= \frac{1}{X_6}\Big(Z_6(Y_6 - a_{6,5}Z_6) + \\ &\quad + \frac{X_3}{Y_3}\left(a_{1,1}Y_6Z_6 + a_{3,3}\frac{X_3}{Y_3}\frac{Y_5}{X_5}Z_6^2 - a_{2,2}\frac{X_3}{Y_3}Y_6Z_6 - a_{4,4}\left(\frac{X_3}{Y_3}\right)^2\frac{Y_5}{X_5}Z_6^2\right)\Big). \end{aligned}$$

Das bedeutet $\mathcal{M} = (\frac{X_3}{Y_3}, Z_6)$ und P ist regulär.

<u>$P = C_9 \cap C_7$:</u>
dann ist $\mathcal{M} = (\frac{X_3}{Y_3}, \frac{Y_5}{X_5}, \frac{Z_5}{X_5}, X_6, Z_6, \pi)$. Es ist $Y_6 \notin \mathcal{M}$ und damit gilt $\pi = \left(\frac{X_3}{Y_3}\right)^4 \frac{Y_5}{X_5}\frac{Z_5}{X_5}$, $\frac{X_3}{Y_3} = \frac{X_6}{Y_6}\frac{Y_5}{X_5}$, $\frac{Z_5}{X_5} = \frac{Z_6}{Y_6}\frac{Y_5}{X_5}$ und

$$X_6 = \frac{Z_6}{Y_6}\Big(Y_6 + a_{1,1}\frac{X_3}{Y_3}Y_6 + a_{3,3}\left(\frac{X_3}{Y_3}\right)^2\frac{Y_5}{X_5}Z_6 - a_{2,2}\left(\frac{X_3}{Y_3}\right)^2 Y_6 - a_{4,4}\left(\frac{X_3}{Y_3}\right)^3\frac{Y_5}{X_5}Z_6 - a_{6,5}Z_6\Big).$$

Das bedeutet $\mathcal{M} = (\frac{Y_5}{X_5}, Z_6)$ und P ist regulär.

<u>$P = C_9 \cap C_8$:</u>
dann ist $\mathcal{M} = (\frac{X_3}{Y_3}, \frac{Y_5}{X_5}, \frac{Z_5}{X_5}, X_6, Y_6 - a_{6,5}Z_6, \pi)$. Es ist $Z_6 \notin \mathcal{M}$, da sonst auch $Y_6 \in \mathcal{M}$ wäre. Damit gilt $\pi = \left(\frac{X_3}{Y_3}\right)^4 \frac{Y_5}{X_5}\frac{Z_5}{X_5}$, $\frac{X_3}{Y_3} = \frac{X_6}{Z_6}\frac{Z_5}{X_5}$, $\frac{Y_5}{X_5} = \frac{Y_6}{Z_6}\frac{Z_5}{X_5}$ und

$$\begin{aligned} Y_6 - a_{6,5}Z_6 &= \frac{1}{Z_6}\Big(X_6Y_6 + a_{2,2}\left(\frac{X_3}{Y_3}\right)^2 Y_6Z_6 + a_{4,4}\left(\frac{X_3}{Y_3}\right)^3\frac{Y_5}{X_5}Z_6^2 - \\ &\qquad - a_{1,1}\frac{X_3}{Y_3}Y_6Z_6 - a_{3,3}\left(\frac{X_3}{Y_3}\right)^2\frac{Y_5}{X_5}Z_6^2\Big). \end{aligned}$$

Das bedeutet $\mathcal{M} = (\frac{Z_5}{X_5}, X_6)$ und P ist regulär.

<u>$C_9 - (C_4 \cup C_7 \cup C_8)$</u> ist ein regulärer Kegelschnitt und damit nach Satz 2.21 auch als Teilmenge von $\mathcal{V}_6$ regulär.

Also ist $\mathcal{V}_6$ regulär und als abgeschlossenes Unterschema eines Produkts von $\mathbf{P}^m_R$ auch eigentlich über R. Man hat den Reduktionstyp II* und erhält $\mathcal{C}$ durch Zusammenkleben von $\mathcal{V}_6$ mit all den weggeschnittenen Teilen. C_1 ist die einzige einfache Komponente. Es ist $m = 9$ und $c = 1$.

5.13 Beweis von Schritt 11

Unsere kummulativen Annahmen bis hier sind $\pi \mid a_1,\ \pi^2 \mid a_2,\ \pi^3 \mid a_3,\ \pi^4 \mid a_4,\ \pi^6 \mid a_6$.

Führt man nun in dem Schema $\mathcal{V}_5$ aus Abschnitt 5.12.3 folgende Substitionen ein

$$\begin{aligned} X' &:= \frac{Y_4}{X_4} X_5 = \frac{X_3}{Y_3} Y_5, \\ Y' &:= Y_5 \quad \text{und} \\ Z' &:= \frac{X_3}{Y_3}\frac{Y_4}{X_4} Z_5 = \frac{Y_4}{X_4}\frac{Z_4}{X_4} X_5 = \frac{X_3}{Y_3}\frac{Z_4}{X_4} Y_5, \end{aligned}$$

so erhält man $\frac{Y_4}{X_4}\frac{X_3}{Y_3} Y_5 \cdot F_5 =$

$$= Y'^2 Z' + a_{1,1} X'Y'Z' + a_{3,3} Y'Z'^2 - X'^3 - a_{2,2} X'^2 Z' - a_{4,4} X'Z'^2 - a_{6,6} Z'^3 =: F',$$

Da auf E/K gilt $\pi \neq 0$, folgt $\frac{X_3}{Y_3}, \frac{Y_4}{X_4}, \frac{Z_4}{X_4} \neq 0$ und weil nicht $X_5 = Y_5 = Z_5 = 0$ sein kann auch $Y_5 \neq 0$. Somit ist die generische Faser E/K von $\mathcal{V}_5$ isomorph zu $Proj\ K[X', Y', Z']/(F')$. Dieser Isomorphismus kommt durch die folgenden Zuordnungen zustande

$$\begin{aligned} \frac{X'}{Z'} &= \frac{X_4}{Z_4} = \frac{X_3}{Z_3} = \frac{X_1}{\pi Z_1} = \frac{X}{\pi^2 Z} \quad \text{und} \\ \frac{Y'}{Z'} &= \frac{Y_3}{X_3}\frac{X_4}{Z_4} = \frac{Y_3}{Z_3} = \frac{Y_2}{\pi Z_2} = \frac{Y_1}{\pi^2 Z_1} = \frac{Y}{\pi^3 Z}. \end{aligned}$$

Daraus sieht man, daß die ursprüngliche Weierstraß-Gleichung nicht minimal war. Man beginne nun den Algorithmus von neuem mit der kleineren Weierstraß-Gleichung $F' = 0$. Die Diskriminante dieser Gleichung ist $\Delta' = \pi^{-12}\Delta$. Da also bei jedem Durchlaufen von Schritt 11 die Diskriminante von E/K durch einen zusätzlichen Faktor π^{12} teilbar sein muß, sie aber ungleich Null in R ist, terminiert der Algorithmus.

Damit ist der Algorithmus von Tate bewiesen. □

Literaturverzeichnis

[Ab] Abhyankar, S.S.: *Resolution of Singularities of Arithmetical Surfaces* in: Arithmetical Algebraic Geometry, Procedings Paper of the Conference on Arithmetic Algebraic Geometry at Purdue University in 1963, Harper and Row, New York 1965, Seiten 111 - 152.

[AM] Atiyah, M., Macdonald, I.: *Introduction to Commutative Algebra*, Addison-Wesley, Reading 1969.

[BLR] Bosch, S., Lütkebohmert, W., Raynaud, M.: *Néron Models*, Springer, Berlin-Heidelberg 1990.

[Bo] Bourbaki, N.: *Commutative Algebra*, Elements of Mathematics, Hermann, Paris 1972.

[Ha] Hartshorne, R.: *Algebraic Geometry*, Graduate Texts in Mathematics 52, Springer, New York 1977.

[Hu] Husemöller, D.: *Elliptic Curves*, Graduate Texts in Mathematics 111, Springer, New York 1987.

[Lm] Lipman, J.: *Desingularization of two-dimensional Schemes* in: Annals of Mathematics Nr. 107, 1978, Seiten 151 - 207.

[Lb] Lichtenbaum, S.: *Curves over Discrete Valuation Rings* in: American Journal of Mathematics Nr. 90, 1968, Seiten 380 - 405.

[Ma] Matsumura, H.: *Commutative Algebra*, 2.Auflage, W.A.Benjamin Co, Reading, Massachusetts 1980.

[Sh] Shafarevich, I.R.: *Lectures on Minimal Models and Birational Transformations of two-dimensional Schemes*, Lectures on Mathematics and Physics Nr. 37, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay 1966.

[Si 1] Silverman, J.H.: *The Arithmetic of Elliptic Curves*, Graduate Texts in Mathematics 106, Springer, New York 1986.

[Si 2] Silverman, J.H.: *Advanced Topics in the Arithmetic of Elliptic Curves*, Graduate Texts in Mathematics 151, Springer, New York 1994.

[Ta] Tate, J.: *Algorithm for determining the Type of a Singular Fiber in an Elliptic Pencil* in: Modular Functions of One Variable IV, Lecture Notes in Mathematics 476, Springer, Berlin-Heidelberg 1975.