

**Aufgabe 1:**

Sei  $l^1(\mathbb{Z})$  die Menge der absolut summierbaren komplexwertigen Funktionen auf  $\mathbb{Z}$ , versehen mit punktweiser Addition, mit der Norm  $\|f\|_1 = \sum_{\mathbb{Z}} |f(n)|$  und mit der Faltung

$$f * g(n) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} f(m)g(n - m) \text{ für } f, g \in l^1(\mathbb{Z}), n \in \mathbb{Z}.$$

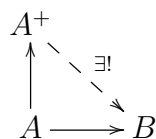
Man zeige:

- a)  $l^1(\mathbb{Z})$  ist eine kommutative Banachalgebra.
- b) Die Abbildung  $f \mapsto \hat{f}$  definiert einen stetigen Algebrenhomomorphismus  $l^1(\mathbb{Z}) \rightarrow \mathcal{C}(\mathbb{T})$ , wo  $\hat{f}(z) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n)z^n$ .
- c) Für  $f \in l^1(\mathbb{Z})$  gilt  $\hat{f}(\mathbb{T}) \subset \sigma(f)$ .

**Aufgabe 2:**

Sei  $A$  eine  $C^*$ -Algebra. Man zeige, dass eine unitale  $C^*$ -Algebra  $A^+$  mit folgender universeller Eigenschaft existiert:

Es gibt eine isometrische Einbettung von  $A$  nach  $A^+$ , und falls  $A \rightarrow B$  ein  $*$ -Homomorphismus in eine unitale  $C^*$ -Algebra  $B$  ist, dann existiert ein eindeutig bestimmter unitaler  $*$ -Homomorphismus  $A^+ \rightarrow B$  so dass das folgende Diagramm kommutiert:



$A^+$  ist hierdurch bis auf Isomorphismus eindeutig bestimmt.

**Aufgabe 3:**

Sei  $X$  ein lokalkompakter Hausdorffraum, und sei

$$\mathcal{C}_b(X) := \{f : X \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ stetig und beschränkt}\}.$$

Man zeige:

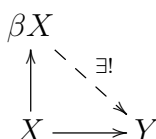
- a)  $\mathcal{C}_b(X)$  ist  $C^*$ -Algebra mit punktweisen Operationen und Supremumsnorm.
- b) Der Raum  $\beta X := \Omega(\mathcal{C}_b(X))$  ist Kompaktifizierung von  $X$ . (Ein kompakter Hausdorffraum  $K$  heißt *Kompaktifizierung* von  $X$ , falls eine Abbildung

$$\kappa : X \rightarrow K$$

existiert, sodass  $\kappa : X \rightarrow \kappa(X)$  ein Homöomorphismus ist und falls  $\kappa(X) \subset K$  dicht ist.)

- c)  $\beta X$  besitzt folgende universelle Eigenschaft:

Zu jeder stetigen Abbildung  $X \rightarrow Y$  von  $X$  in einen kompakten Hausdorffraum  $Y$  existiert eine eindeutig bestimmte stetige Abbildung  $\beta X \rightarrow Y$  so dass das folgende Diagramm kommutiert:



In welchem Sinne ist  $\beta X$  die größte Kompaktifizierung von  $X$ ?