Übungen zu Operatoralgebren **Blatt 2**
Prof. S. Echterhoff / Prof. W. Winter **WS 16/17**

Aufgabe 1:
Sei $l^1(\mathbb{Z})$ die Menge der absolut summierbaren komplexwertigen Funktionen auf $\mathbb{Z}$, versehen mit punktweiser Addition, mit der Norm $\|f\|_1 = \sum_{\mathbb{Z}} |f(n)|$ und mit der Faltung

$$f * g(n) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} f(m)g(n-m) \text{ für } f, g \in l^1(\mathbb{Z}), n \in \mathbb{Z}.$$

Man zeige:
a) $l^1(\mathbb{Z})$ ist eine kommutative Banachalgebra.
b) Die Abbildung $f \mapsto \hat{f}$ definiert einen stetigen Algebrenhomomorphismus $l^1(\mathbb{Z}) \to \mathcal{C}(\mathbb{T})$, wo $\hat{f}(z) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) z^n$.
c) Für $f \in l^1(\mathbb{Z})$ gilt $\hat{f}(\mathbb{T}) \subset \sigma(f)$.

Aufgabe 2:
Sei A eine C*-Algebra. Man zeige, dass eine unitale C*-Algebra A^+ mit folgender universeller Eigenschaft existiert:
Es gibt eine isometrische Einbettung von A nach A^+, und falls $A \to B$ ein *-Homomorphismus in eine unitale C*-Algebra B ist, dann existiert ein eindeutig bestimmter unitaler *-Homomorphismus $A^+ \to B$ so dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} A^+ \arrow[dr, dashed, "\exists!"] & \\ A \arrow[u] \arrow[r] & B \end{tikzcd}$$

A^+ ist hierdurch bis auf Isomorphismus eindeutig bestimmt.

Aufgabe 3:
Sei X ein lokalkompakter Hausdorffraum, und sei

$$\mathcal{C}_{\mathrm{b}}(X) := \{f : X \to \mathbb{C} \mid f \text{ stetig und beschränkt}\}.$$

Man zeige:
a) $\mathcal{C}_{\mathrm{b}}(X)$ ist C*-Algebra mit punktweisen Operationen und Supremumsnorm.
b) Der Raum $\beta X := \Omega(\mathcal{C}_{\mathrm{b}}(X))$ ist Kompaktifizierung von X. (Ein kompakter Hausdorffraum K heißt *Kompaktifizierung* von X, falls eine Abbildung

$$\kappa : X \to K$$

existiert, sodass $\kappa : X \to \kappa(X)$ ein Homöomorphismus ist und falls $\kappa(X) \subset K$ dicht ist.)
c) βX besitzt folgende universelle Eigenschaft:
Zu jeder stetigen Abbildung $X \to Y$ von X in einen kompakten Hausdorffraum Y existiert eine eindeutig bestimmte stetige Abbildung $\beta X \to Y$ so dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} \beta X \arrow[dr, dashed, "\exists!"] & \\ X \arrow[u] \arrow[r] & Y \end{tikzcd}$$

In welchem Sinne ist βX die größte Kompaktifizierung von X?

Abgabe Donnerstag, 10.11. in der Vorlesung.