
Aufgabe 1:
Sei A eine C*-Algebra. Ein Element $p \in A$ heißt Projektion, falls p selbstadjungiert und idempotent ist, d.h. $p = p^* = p^2$.
a) Ein Element $p \in A$ ist eine Projektion genau dann wenn p normal ist und $\sigma(p) \subset \{0, 1\}$ ist.
b) Ist $a \in A$ normal und ist $f \in \mathcal{C}_0(\sigma(a) \setminus \{0\})$ mit f reell und $f^2 = f$, so ist $f(a)$ eine Projektion.

Aufgabe 2:
Sei A eine unitale C*-Algebra.
a) Für jedes Unitäre $u \in A$ (d.h. u ist invertierbar mit $u^{-1} = u^*$) gilt $\|u\| = 1$ und $\sigma(u) \subset \mathbb{T}$.
b) Sei $a \in A_{\mathrm{sa}}$ mit $\|a\| \leq 1$, dann ist $u = a + i(1 - a^2)^{\frac{1}{2}}$ unitär.
Man folgere, dass die unitären Elemente A aufspannen.
c) Seien $a, b \in A$, mit $0 \leq a \leq b$ und a invertierbar.
Dann ist b invertierbar und es gilt $0 \leq b^{-1} \leq a^{-1}$ (vgl. Satz 3.7 (vii)).

Aufgabe 3:
Sei $f \in \mathcal{C}_0((0, 1])$. Zu jedem $\epsilon > 0$ existiert $\delta > 0$, so dass folgendes gilt:
Sei A eine C*-Algebra und $a, b \in A$ positive Kontraktionen.
Falls $\|a - b\| \leq \delta$, so gilt $\|f(a) - f(b)\| \leq \epsilon$.

Aufgabe 4:
Sei A eine C*-Algebra.
a) Für beliebige $a, b \in A$ zeige man, dass $\sigma(ab) \cup \{0\} = \sigma(ba) \cup \{0\}$, und gebe ein Beispiel, wo $\sigma(ab) \neq \sigma(ba)$.
b) Für positive $a, b \in A$ zeige man, dass $\sigma(ab) \subseteq [0, \infty)$. Hinweis: Quadratwurzel.
c) Ist ab immer positiv, wenn a und b positiv sind?

Abgabe Donnerstag, 17.11. in der Vorlesung.