Aufgabe 1:
Seien A und B be C*-Algebren, A unital, und sei $\varphi\colon A \to B$ linear und positiv.
a) Man zeige, dass φ *-erhaltend ist.
b) Man zeige, dass φ beschränkt ist. (Die Norm von φ lässt sich leicht durch $2\|\varphi(1)\|$ beschränken; mit mehr Aufwand kann man sogar $\|\varphi\| = \|\varphi(1)\|$ zeigen.)

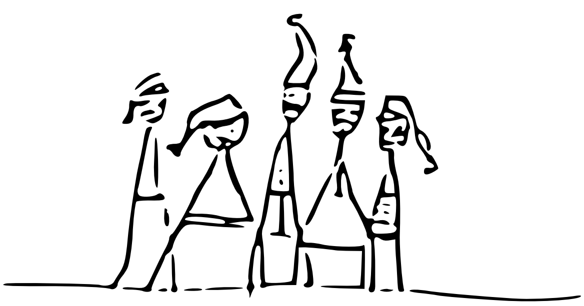
Aufgabe 2:
Sei φ ein positives Funktional auf der C*-Algebra A, und sei $(\mathcal{H}_\varphi, \pi_\varphi)$ die zugehörige GNS Darstellung aus 5.11.
a) Man zeige, dass π_φ *-erhaltend ist.
b) Man zeige, dass $\xi_\varphi = \lim_\lambda e_\lambda + N_\varphi$ in $\mathcal{H}_\varphi$ existiert, wo $(e_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ eine beliebige approximative Eins für A ist.
c) Man zeige, dass ξ_φ ein zyklischer Vector für π_φ ist und dass der Vektor ξ_φ das Funktional φ mittels

$$\varphi(a) = \langle \pi_\varphi(a)\xi_\varphi, \xi_\varphi\rangle,\ a \in A$$

implementiert.
Das positive Funktional φ heißt treu, falls $\varphi(a) = 0 \implies a = 0$ für alle $a \in A_+$ gilt.
d) Man zeige, dass π_φ treu als Darstellung (d.h. injektiv) ist, falls φ treu als Funktional ist.

Aufgabe 3:
Sei A eine C*-Algebra und τ ein Spurzustand auf A (d.h. ein Zustand, welcher die Bedingung $\tau(x^*x) = \tau(xx^*)$ erfüllt). Man zeige:
a) Es gilt $\tau(ab) = \tau(ba)$ für alle $a, b \in A$.
(Hinweis: Polarisierung, d.h. $4y^*x = \sum_{k=0}^{3} i^k(x + i^k y)^*(x + i^k y)$.)
b) Ist A einfach, so ist τ treu.

Aufgabe 4:
Sei (A_n, φ_n) ein induktives System von C*-Algebren, $A = \lim_\to(A_n, \varphi_n)$. Man zeige: Falls alle A_n sowie die Verbindungsabbildungen unital sind, und falls jedes A_n genau einen Spurzustand hat, so auch A. Man folgere, dass die CAR Algebra M_{2^∞} genau einen Spurzustand hat. Was geht im nichtunitalen Fall schief?



Abgabe Donnerstag, 08.12. in der Vorlesung.