Aufgabe 1:
Sei $\mathcal{H}$ ein separabler Hilbertraum.
a) Man bestimme die Kommutante der kompakten Operatoren $\mathcal{K}(\mathcal{H})$.
b) Man bestimme den starken Abschluss von $\mathcal{K}(\mathcal{H})$.
c) Man zeige, dass $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ als von Neumann Algebra einfach erzeugt ist, das heißt es existiert ein Operator $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ so dass $\mathrm{W}^*(T) = \mathcal{B}(\mathcal{H})$ gilt.
(Es ist ein offenes Problem, ob jede von Neumann Algebra auf einem separablen Hilbertraum einfach erzeugt ist.)

Aufgabe 2:
Sei $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$ die abgeschlossene Einheitsscheibe mit Lebesguemaß. Die C*-Algebra $A := \mathcal{C}(\mathbb{D})$ wirke auf $L^2(\mathbb{D})$ durch Multiplikation. Man zeige, dass die partielle Isometrie in der Polarzerlegung des Operators $\mathrm{id}_{\mathbb{D}}$ nicht in A liegt.

Aufgabe 3:
Eine Projektion $p \neq 0$ in einer von Neumann Algebra A heißt minimal, falls für jede andere Projektion $q \neq 0$ in A gilt: $q \leq p \implies q = p$.
a) Man zeige, dass eine Projektion p minimal ist, genau dann wenn $pAp \cong \mathbb{C} \cdot p$ gilt.
b) Was sind die minimalen Projektionen in $\mathcal{B}(\mathcal{H})$?

Abgabe Donnerstag, 12.1. in der Vorlesung.