**Aufgabe 1:**
Eine abelsche $^*$-Unteralgebra $A$ of $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ heißt maximal abelsch, falls sie nicht echt enthalten in einer weiteren abelschen $^*$-Unteralgebra von $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ ist.
a) Man zeige, dass eine maximal abelsche $^*$-Unteralgebra von $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ eine von Neumann Algebra ist.
b) Man zeige, dass $A$ eine maximal abelsche $^*$-Unteralgebra von $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ ist, genau dann wenn $A = A'$.

**Aufgabe 2:**
Sei $(X, \mu)$ ein $\sigma$-endlicher Maßraum. Die Algebra $L^\infty(X, \mu)$ von (Äquivalenzklassen von) wesentlich beschränkten messbaren komplexen Funktionen ist eine C$^*$-Algebra mit der wesentlichen Supremumsnorm $\|f\|_\infty$, definiert als kleinstes $c \geq 0$ so dass

$$|f(x)| \leq c \text{ für fast alle } x \in X.$$

Die Elemente von $L^\infty(X, \mu)$ wirken als Multiplikationsoperatoren auf $L^2(X, \mu)$. Das heißt, $f \in L^\infty(X, \mu)$ wirkt durch $M_f(g) = fg$ für $g \in L^2(X, \mu)$.
a) Man zeige, dass $\|M_f\| = \|f\|_\infty$.
b) Man zeige, dass $L^\infty(X, \mu)$ eine maximal abelsche $^*$-Unteralgebra von $\mathcal{B}(L^2(X, \mu))$ ist.
Hinweis:
- Man nehme zunächst $\mu$ endlich an. Für $T \in L^\infty(X)'$ setze $f = T(1_X)$ und zeige $T = M_f$.
- Man betrachte nun $X = \mathbb{N}$ mit Zählmaß. Für $T \in \ell^\infty(\mathbb{N})'$ setze $f_n = T(\delta_n)$ and $f(n) = f_n(n)$. Zeige $T = M_f$.
- Den allgemeinen Fall erhält man aus der Kombination beider Argumente.
Wir betrachten nun die Fälle $X = \mathbb{N}$ mit Zählmaß oder $X = [0, 1]$ mit Lebesguemaß.
c) Was sind die minimalen Projektionen in $\ell^\infty(\mathbb{N})$ und in $L^\infty([0, 1])$?
d) Man schließe, dass $\ell^\infty(\mathbb{N})$ und $L^\infty([0, 1])$ nichtisomorphe von Neumann Algebren sind. Ist eine dieser von Neumann Algebren isomorph zu $\mathcal{B}(\mathcal{H})$?

Abgabe Freitag, 22.1. in der Vorlesung.