Aufgabe 1:
Sei $1_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} \in A \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H})$ eine unitale von Neumann Algebra. Definiere das Zentrum von A als

$$\mathcal{Z}(A) = \{x \in A \mid xy = yx \text{ für alle } y \in A\}.$$

Wir sagen A ist ein Faktor, falls $\mathcal{Z}(A) = \mathbb{C} \cdot 1_{\mathcal{B}(\mathcal{H})}$.
a) Ist $\ell^\infty(\mathbb{N})$ ein Faktor? Ist $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ ein Faktor?
b) Man zeige, dass A ein Faktor ist, genau dann wenn A' ein Faktor ist.
c) Man zeige, dass A ein Faktor ist, genau dann wenn 0 and $1_{\mathcal{B}(\mathcal{H})}$ die einzigen zentralen Projektionen in A sind.

Aufgabe 2:
Sei A eine C*-Algebra und $\pi\colon A \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ eine irreduzible Darstellung. Man zeige:
a) Falls $z \in A$ im Zentrum von A liegt, d.h. $za = az$ für alle $a \in A$, dann existiert $\lambda \in \mathbb{C}$ so dass $\pi(z) = \lambda \cdot 1_{\mathcal{H}}$.
b) Falls A kommutativ ist, so ist $\mathcal{H}$ is eindimensional.

Aufgabe 3:
Sei $M\colon C([0,1]) \to B(L^2([0,1]))$ die Darstellung von $C([0,1])$ als Multiplikationsoperatoren, d.h. $M(f)(g) = fg$ für alle $f \in C([0,1])$ und $g \in L^2([0,1])$.
a) Ist M eine zyklische Darstellung?
b) Ist M eine irreduzible Darstellung?

Abgabe Donnerstag, 25.1. in der Vorlesung.