Universität Münster D. Bohle, W. Werner

Übungen zur Vorlesung 'Mathematik für Physiker III' WS 09/10

Aufgaben zur Besprechung in der Woche vom **11.01.10** bis **17.01.10**

Sei I ein Intervall und $c : I \to \mathbb{R}^n$ eine Kurve mit $||c'(s)|| > 0$ für alle $s \in I$. Sei außerdem $t_0 \in I$ und

$$\psi(s) := \int_{t_0}^{s} ||c'(t)||dt.$$

Dann ist

$$\psi : I \to J := \psi(I)$$

eine orientierungserhaltende Parametertransformation. Sei $\varphi := \psi^{-1} : J \to I$ die zugehörige Umkehrfunktion. Man nennt die Abbildung $c \circ \varphi : J \to \mathbb{R}^n$ die Parametrisierung von c nach Bogenlänge.

Aufgabe XXI:

(a) Sei $\gamma_1 : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = r \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$, $r > 0$. Parametrisieren Sie γ_1 nach Bogenlänge.

(b) Die Kurve $\gamma_2 : [0, t] \to \mathbb{R}^2$ sei gegeben durch $\gamma_2(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}$. Parametrisieren Sie γ_2 nach Bogenlänge.

Aufgabe XXII: Betrachten Sie eine so genannte Regelfläche $\varphi : (a, b) \times (c, d) \to \mathbb{R}^3$, $\varphi(s, t) = \gamma(t) + s\mathrm{u}(t)$, wobei $\gamma, \mathrm{u} : (c, d) \to \mathbb{R}^3$ zwei beliebig oft differenzierbare Kurven sind.

(a) Machen Sie sich anschaulich klar, wie eine Regelfläche im $\mathbb{R}^3$ aussieht.

(b) Stellen Sie das Möbiusband als Regelfläche dar.

Aufgaben zur Abgabe bis zum **19.01.09**, **13:00 Uhr**

Aufgabe 41:

(a) Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ eine Kurve. Geben Sie eine notwendige und hinreichende Bedingung für γ' an, so dass γ regulär ist.

(b) Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ eine reguläre Kurve. Zeigen Sie, dass γ nach Bogenlänge parametrisiert werden kann.

Aufgabe 42: Berechnen Sie die Oberfläche des Torus.

Aufgabe 43:

(a) Zeigen Sie: Ist $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ einer reguläre Kurve, die nach Bogenlänge parametrisiert ist, so ist $||\gamma'(t)|| = 1$ für alle $t \in [a,b]$. Ist umgekehrt $\gamma : [0,L] \to \mathbb{R}^n$ eine reguläre Kurve mit $||\gamma'(t)|| = 1$ für alle $t \in [0,L]$ so ist γ nach Bogenlänge parametrisiert.

(b) Zeigen Sie, dass eine reguläre Kurve γ mit $||\gamma(t)|| = K \in \mathbb{R}$ für alle $t \in [a,b]$, in jedem Punkt senkrecht auf ihrer Ableitung steht.

Aufgabe 44: Es sei $\varphi : (a,b) \times (c,d) \to \mathbb{R}^3$, $\varphi(s,t) = \gamma(t) + s\mathrm{u}(t)$ eine Regelfläche mit $||\mathrm{u}(t)|| = 1$ für alle $t \in (c,d)$. Wann ist diese Fläche regulär? (Es darf ohne Beweis benutzt werden, dass o.B.d.A. $\langle \mathrm{u}(t), \gamma'(t) \rangle = 0$ für alle $t \in (c,d)$ gilt.)