Übungen zur Vorlesung 'Mathematik für Physiker III' **WS 09/10**

Aufgaben zur Besprechung in der Woche vom **18.01.10** bis **24.01.10**

Aufgabe XXIII: Berechnen Sie das Flussintegral des Gravitationsfeldes über der 2-Sphäre S_r^2 mit Radius $r > 0$. Die Sphäre sei dabei „nach außen" orientiert.

Aufgabe XXIV: Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Figur mit stückweise stetig parametrisierbarem Rand und ν das äußere Einheitsnormalenfeld von G. Zeigen Sie:

$$\int_{\partial G} \langle x, \nu \rangle d\sigma = n\mathrm{Vol}(G).$$

Aufgaben zur Abgabe bis zum **26.01.09**, **13:00 Uhr**

Aufgabe 45: Sei $\gamma : [0,2\pi]\times[0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(u,v) = \begin{pmatrix} (R + a\cos v)\cos u \\ (R + a\cos v)\sin u \\ \sin v \end{pmatrix}$ eine Parametrisierung des Torus T. Berechnen Sie:

(a) Das Einheitsormalenfeld ν auf T mit $\nu(R + a, 0, 0) = (1, 0, 0)$.

(b) Für das Vektorfeld $F(x, y, z) := (x, y, z)$ das Integral $\int_T F d\sigma$.

Aufgabe 46: Auf einer regulären Hyperfläche $M \subseteq \mathbb{R}^n$, in der zwei Punkte durch einen stetigen Weg verbunden werden können, gibt es entweder kein Einheitsnormalenfeld oder genau zwei.

Aufgabe 47: Betrachten Sie die abgeschlossene Einheitskugel $K_1(0)$ im $\mathbb{R}^3$ und das darauf definierte Vektorfeld $F(x, y, z) = (x, xy, z^3)$. Zeigen Sie durch Nachrechnen der beiden Seiten die Formel

$$\int_{K_1(0)} \mathrm{div} F \, d(x,y,z) = \int_{\partial K_1(0)} \langle F, \nu \rangle \, d\sigma,$$

wobei ν das äußere Normalenfeld an $K_1(0)$ bezeichnet.

Aufgabe 48: Betrachten Sie das Vektorfeld $F(x, y, z) = (z, x, y)$ auf der Halbkugelschale

$$S : x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad z \geq 0.$$

Sei ν das äußere Normalenfeld an S und γ eine positiv orientierte Kurve, die den Rand von S parametrisiert. Zeigen Sie durch Nachrechnen die Richtigkeit von

$$\int_S \langle \mathrm{rot} F, \nu \rangle d\sigma = \int \langle F, d\gamma \rangle.$$