Universität Münster D. Bohle, W. Werner

Übungen zur Vorlesung 'Mathematik für Physiker III' WS 09/10

Aufgaben zur Besprechung in der Woche vom **19.10.09** bis **25.10.09**

Aufgabe I: Betrachten Sie den $\mathbb{K}$-Vektorraum $\ell^2 = \left\{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \,\middle|\, x_n \in \mathbb{K}, \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty\right\}$ zusammen mit dem Skalarprodukt $\langle (x_n), (y_n)\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y_n}$. Zeigen Sie, dass die Folge (χ_n) mit den Folgengliedern

$$\chi_n = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, 0, 0, \ldots\right)$$

in ℓ^2 bezüglich $\langle\ ,\ \rangle$ konvergiert und bestimmen Sie den Grenzwert.

Aufgabe II:

(a) Die auf dem Intervall $[-\pi, \pi]$ definierten Funktionen $\sin mx, \cos mx$, $m \in \mathbb{N}$ bilden bezüglich des Skalarprodukts

$$\langle f, g\rangle := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)\,dt$$

ein orthonormales System von Funktionen. Berechnen Sie mindestens drei der im Beweis dieser Aussage auftretenden Integrale.

(b) Es sei f eine reelle 2π-periodische Regelfunktion.

(i) Das n-te Fourierpolynom $S_n f$ von f lässt sich auf folgende Art umformen:

$$S_n f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

wobei $a_k = \widehat{f}(k) + \widehat{f}(-k)$ und $b_k = i(\widehat{f}(k) - \widehat{f}(-k))$ gilt.

(ii) Es gilt:

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

und

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx, \qquad k = 1, 2, \ldots\ .$$

(iii) Was gilt für a_k und b_k falls f gerade bzw. ungerade ist.

Aufgaben zur Abgabe bis zum **27.10.09**, **13:00 Uhr**

Aufgabe 1: Es sei $w : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige, positive und nirgends verschwindende Funktion. Man zeige, dass

$$\langle f, g\rangle_w = \int_a^b w(t) f(t)\overline{g(t)}\, dt$$

eine hermitesche Form auf dem Raum der stetigen Funktionen $[a,b] \to \mathbb{C}$ definiert. Kann man hier eine der Bedingungen an w weglassen?

Aufgabe 2: Es sei

$$c_{00} = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid x_n \in \mathbb{C} \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \text{ und es gibt ein } n_0 \in \mathbb{N} \text{ mit } x_n = 0 \text{ für } n \geq n_0\},$$

versehen mit dem Skalarprodukt $\langle x, y\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y}_n$. Zeige, das $(c_{00}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ kein Hilbertraum ist.

Aufgabe 3: Man bestimme die rellen Fourierreihen der auf dem Intervall $[-\pi, \pi]$ definierten Funktionen

$$f(x) = |x| \qquad g(x) = x^2 \qquad h(x) = |\sin x|.$$

und zeige durch das Einsetzen passender Werte, daß

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}.$$

Aufgabe 4:

(a) Man bestätige den folgenden Sachverhalt: Ist $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $\rho > 0$ so ist die komplexe Fourierreihe von $f(t) := g(re^{it})$ für jedes $r < \rho$ gegeben durch

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n \mathrm{e}^{int}.$$

(b) Man setze in die Potenzreihe von e^x für x den Wert e^{it} ein und gewinne die reelle Fourierreihe von $\mathrm{e}^{\cos t}\cos(\sin t)$ sowie $\mathrm{e}^{\cos t}\sin(\sin t)$.