Universität Münster D. Bohle, W. Werner

Übungen zur Vorlesung 'Mathematik für Physiker III' **WS 09/10**

Aufgaben zur Besprechung in der Woche vom **26.10.09** bis **01.11.09**

Aufgabe III: Sei H ein Hilbert-Raum. Zwei Teilmengen $A, B \subseteq H$ heißen orthogonal, in Zeichen $A \perp B$, falls $x \perp y$ für alle $x \in A, y \in B$ gilt. Die Menge $A^{\perp} := \{x \in H \mid \{x\} \perp A\}$ heißt orthogonales Komplement von A. Zeige:

(a) $||x||^2 + ||y||^2 = ||x+y||^2$ für alle $x \in A$, $y \in A^{\perp}$.

(b) $A^{\perp}$ ist ein Unterraum von H.

Aufgabe IV: Wenden Sie das Gram-Schmidt-Verfahren explizit auf die Vektoren $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ im euklidischen Vektorraum $\mathbb{R}^3$ sowie auf die Abbildungen x^k, $k = 0, 1, 2, 3$, im (reellen) Hilbert-Raum $L^2[-1, 1]$ an.

Aufgaben zur Abgabe bis zum **03.11.09**, **13:00 Uhr**

Aufgabe 5: Sei H ein Hilbert-Raum. Zeigen Sie:

(a) Ist $P : H \to H$, $P \neq 0$ eine Projektion und $\lambda \in \mathbb{K}$ ein Eigenwert von P, so ist $\lambda \in \{0, 1\}$.

(b) Ist $P : H \to H$ eine Orthogonalprojektion so gilt $P = P^*$.

Aufgabe 6: In der Vorlesung wurde für einen beliebigen Hilbertraum H mit abgeschlossenem Unterraum $W \subseteq H$ gezeigt, dass $H = W \oplus W^\perp$, $W \perp W^\perp$ gilt. Beweisen Sie mithilfe des Gram-Schmidt Verfahrens diese Aussage nochmal für einen Untervektorraum eines endlichdimensionalen euklidischen oder unitären Vektorraumes V. Folgern Sie außerdem $\dim V = \dim W + \dim W^\perp$.

Aufgabe 7: Es sei $L^2[-1, 1]$ der mit dem Skalarprodukt $\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)\,dt$ versehene reelle Hilbert-Raum sowie für $n \in \mathbb{N}_0$

$$L_n(t) = \sqrt{n + \frac{1}{2}}\,\frac{1}{2^n n!}\,\frac{d^n}{dt^n}(t^2 - 1)^n$$

das *Legendre-Polynom* der Ordnung n. Man zeige:

(a) Die Funktionen L_n, $n \in \mathbb{N}$ sind Polynome vom Grad n.

(b) Es gilt $\langle x^m, L_n\rangle = 0$ für $0 \leq m < n$.

(c) Die Funktionen L_n, $n \in \mathbb{N}$ bilden ein Orthonormalsystem im Raum $L^2[-1, 1]$.

Hinweis: Bei den Rechnungen im Aufgabenteil (b) hilft eine mehrfache partielle Integration sowie die Beobachtung, dass die Funktionen $\left[(t^2 - 1)^N\right]^{(n)}$ für $0 \leq n < N$ Nullstellen bei ± 1 besitzen.

Aufgabe 8:

(a) Es sei $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ eine linear unabhängige Teilmenge des Hilbertraums H, $\{x_1, \ldots, x_n\}$ die Menge, die herauskommt, wenn man auf B das Gram-Schmidt-Verfahren anwendet. Man zeige: Ist $\{y_1, \ldots, y_n\} \subseteq H$ eine Menge paarweise orthogonaler Vektoren der Länge 1 sowie

$$\mathrm{lin}\{x_1, \ldots, x_k\} = \mathrm{lin}\{y_1, \ldots, y_k\} \qquad \text{für alle } k \leq n,$$

so gibt es für $i = 1, \ldots, n$ Zahlen $c_i \in \mathbb{K}$ mit $|c_i| = 1$, so dass $x_i = c_i y_i$ für alle $i = 1, \ldots, n$.

(b) Die Legendre-Polynome kommen heraus, wenn man das Gram-Schmidt-Verfahren auf die Polynome $\{x^n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$ im Raum $L^2[-1, 1]$ anwendet.