Universität Münster D. Bohle, W. Werner

Übungen zur Vorlesung 'Mathematik für Physiker III' WS 09/10

Aufgaben zur Besprechung in der Woche vom **02.11.09** bis **08.11.09**

Aufgabe V: Betrachten Sie den Hilbert-Raum $H = \mathbb{K}^n$ und zeigen Sie: Wird $T \in L(H)$ durch die Matrix $(\alpha_{i,j})_{i,j}$ bezüglich einer ONB dargestellt, so wird T^* durch $(\overline{\alpha}_{j,i})_{i,j}$ dargestellt.

Aufgabe VI:

(a) Berechnen Sie die Norm der Abbildung $T \in L(\mathbb{C}^n)$, $T(x_1, \ldots, x_n) = (\alpha_1 x_1, \ldots, \alpha_n x_n)$, mit $\alpha_i \in \mathbb{C}$ für $i = 1, \ldots, n$.

(b) Berechnen sie die Adjungierte der Abbildung $D : \ell^2 \to \ell^2$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (b_n x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wobei $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge ist.

Aufgaben zur Abgabe bis zum **10.11.09**, **13:00 Uhr**

Aufgabe 9: Es sei H ein Hilbert-Raum und $y \in H$. Betrachten Sie die Abbildung $\varphi_y : H \to \mathbb{C}$, $\varphi(x) = \langle x, y \rangle$ und zeigen Sie, dass φ_y stetig mit $||\varphi_y|| = ||y||$ ist.

Aufgabe 10: Zeigen Sie, dass folgende Abbildungen beschränkt und linear sind:

(a) $D : \ell^2 \to \ell^2$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (b_n x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wobei $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge ist.

(b) $S : \ell^2 \to \ell^2$, $S(x_1, x_2, \ldots) = (x_2, x_3 \ldots)$.

Aufgabe 11:

(a) Sei $S : \ell^2 \to \ell^2$, $S(x_1, x_2, \ldots) = (x_2, x_3 \ldots)$. Berechnen Sie die Adjungierte von S.

(b) Es sei $C([a, b], \mathbb{C})$ der Raum der stetigen Funktionen auf dem Intervall $[a, b]$ mit Werten in $\mathbb{C}$, versehen mit dem Skalarprodukt $\langle f, g\rangle := \int_a^b f(t)\overline{g(t)}dt$.Berechnen Sie die Adjungierte Abbildung von $T : C([0, 1], \mathbb{C}) \to C([0, 1], \mathbb{C})$, $f \mapsto hf$, wobei $h \in C([a, b], \mathbb{C})$ ist.

Aufgabe 12: Sei H der Hilbert-Raum ℓ^2 und $T \in L(H)$. Der Operator T lässt sich als unendliche Matrix auffassen indem man die kanonische Basis $\{e_i = (\delta_{i,k})_k = (0, \ldots, 0, 1, 0, 0, \ldots) \mid i \in \mathbb{N}\}$ abbildet, $T(e_j) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_{i,j} e_i$, und $A := (\alpha_{i,j})_{i,j}$ betrachtet.

(a) Nach Definition sind die Spalten der Matrix A, analog zum Endlichdimensionalen, die Bilder der Basisvektoren. Bestimmen Sie die darstellende Matrix von A^* und geben Sie eine ähnliche Interpretation für die Zeilen von A an.

(b) Sowohl die Zeilen, als auch die Spalten von A sind Elemente von ℓ^2.