Universität Münster D. Bohle, W. Werner

Übungen zur Vorlesung 'Mathematik für Physiker III' **WS 09/10**

Aufgaben zur Besprechung in der Woche vom **09.11.09** bis **15.11.09**

Aufgabe VII: Sei H ein Hilbert-Raum und $T \in L(H)$. Ist λ ein Eigenwert von T so ist $\lambda \in \sigma(T)$.

Aufgabe VIII: Betrachten Sie die eindimensionale Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Zeigen Sie: Sind $F, G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbare Funktionen, so löst $u(t,x) := F(x - ct) + G(x + ct)$ die Differentialgleichung.

Aufgaben zur Abgabe bis zum **17.11.09**, **13:00 Uhr**

Aufgabe 13: Sei H ein Hilbert-Raum und $T \in L(H)$. Zeigen Sie:

(a) Ist T invertierbar, so ist auch T^* invertierbar mit $(T^*)^{-1} = \left(T^{-1}\right)^*$.

(b) Ist $\lambda \in \sigma(T)$ so ist $\overline{\lambda} \in \sigma(T^*)$.

Aufgabe 14: Betrachten Sie die eindimensionale Wellengleichung $u_{tt} = c^2 u_{xx}$.

(a) Führen Sie die Substitution $\xi = x - ct$ und $\eta = x + ct$ durch und zeigen Sie, dass sich hierdurch die Wellengleichung zu $\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} = 0$ transformiert.

(b) Argumentieren Sie, wie man durch die Substitution aus (a) leicht zu der allgemeinen Lösung aus Aufgabe VIII gelangt.

Wodurch unterscheidet sich diese Lösung der Wellengleichung von der, die in der Vorlesung besprochen worden ist?

Aufgabe 15: Wie in den Aufgaben VIII und 14 gezeigt, ist die allgemeine Lösung der eindimensionalen Wellengleichung durch $u(t,x) = F(x-ct) + G(x+ct)$ gegeben, wobei $F, G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ beliebige zweimal differenzierbare Funktionen sind. Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar. Zeigen Sie, dass eine Lösung des Anfangswertproblems

$$u(0,x) = f(x), \quad u_t(0,x) = g(x)$$

durch

$$u(t,x) = \frac{f(x-ct) + f(x+ct)}{2} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)ds$$

gegeben ist. Ist diese Lösung die einzige?

Aufgabe 16: Stellt man sich Wärme (gut isoliert) auf dem Rand des Einheitskreises (den wir uns hier durch den Übergang $x \leftrightarrow \mathrm{e}^{ix}$ als das Intervall $[-\pi, \pi]$ mit zusammengeklebten Endpunkten vorstellen), verteilt vor und interessiert man sich dafür, wie diese Verteilung sich im Laufe der Zeit ändert, so ist ein mathematisches Modell für diese Situation durch

$$\begin{gathered} u_t - u_{xx} = 0, \quad t > 0 \\ u(x,0) = f(x), \quad f(x+2\pi) = f(x) \quad x \in \mathbb{R} \\ u(x+2\pi, t) = u(x,t) \end{gathered}$$

gegeben. Hierbei ist $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ die Temperatur am Punkt $x \in [-\pi, \pi]$ zum Zeitpunkt $t \in \mathbb{R}$ und f die anfängliche Wärmeverteilung, hier als periodische Funktion auf $[-\pi, \pi]$ dargestellt.

(a) Zeigen Sie, dass eine Separation der Veränderlichen auf Lösungen der Form

$$u(x,t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k(t)\mathrm{e}^{ikx} \quad \text{mit} \quad C_k'(t) = -k^2 C_k(t)$$

führt.

(b) Folgern Sie, dass die Lösung dieses Anfangswertproblems durch

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k)\mathrm{e}^{ikx-k^2t}$$

gegeben ist, wo $(\widehat{f}(k))_{k\in\mathbb{Z}}$ die Folge der (komplexen) Fourierkoeffizienten ist.