Universität Münster D. Bohle, W. Werner

Übungen zur Vorlesung ‘Mathematik für Physiker III’ WS 09/10

Wiederholungszettel zum Thema Hilbert-Räume

Aufgaben zur Besprechung in der Woche vom **16.11.09** bis **22.11.09**

Aufgabe IX: Ist $A \in M_n(\mathbb{C})$ eine normale Matrix so existiert eine ONB von $\mathbb{C}^n$ aus Eigenvektoren von A. Nach Aufgabe 20 (a) gibt es daher eine unitäre Matrix $U \in M_n(\mathbb{C})$ so, dass U^*AU Diagonalgestalt hat. Zeigen Sie, dass die Matrix A positiv (bzw. selbstadjungiert, unitär) ist genau dann, wenn die Eigenwerte von A positiv sind (bzw. reell sind, Norm 1 haben).

Aufgabe X: Geben Sie eine 3×3-Matrix an, die nur reelle Eigenwerte hat aber nicht selbstadjungiert ist.

Aufgaben zur Abgabe bis zum **24.11.09**, **13:00 Uhr**

Aufgabe 17:

(a) Setzen Sie die Funktion $f(x) = x\left(\frac{T}{2} - x\right)$ für $0 < x < \frac{T}{2}$ zu einer ungeraden T-periodischen Funktion fort und bestimmen Sie deren Fourier-Reihe.

(b) Stellen Sie $f(x) = \cos x$ im Intervall $(0, \pi)$ als reine Sinus-Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx)$ dar.

Aufgabe 18: Untersuchen Sie im Raum ℓ^2 diese Folgen auf Konvergenz:

(a) $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $a_k = \left(\frac{1}{k^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

(b) $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $b_k = \left(\left(1 - \frac{1}{k}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Aufgabe 19: Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $a_k = (a_{k,n})_{n\in\mathbb{N}}$ für $k \in \mathbb{N}$, eine Folge in ℓ^2. Zeigen Sie: Konvergiert $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in ℓ^2, so existieren auch für alle $n \in \mathbb{N}$ die Grenzwerte $\lim\limits_{k\to\infty} a_{k,n}$. Genügt umgekehrt die Existenz dieser Grenzwerte um sicherzustellen, dass die Folge $(a_k)_{k\in N}$ konvergiert?

Aufgabe 20:

(a) Sei $A \in M_n(\mathbb{C})$ eine Matrix und $\{x_1, \ldots, x_n\}$ eine ONB von $\mathbb{C}^n$ bestehend aus Eigenvektoren von A. Zeigen Sie: Es gibt eine unitäre Matrix $U \in M_n(C)$ so, dass U^*AU Diagonalgestalt hat.

(b) Sei $D : \ell^2 \to \ell^2$ der Diagonaloperator aus Aufgabe 10 (a). Welche Bedingungen muss die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ erfüllen damit der Operator D positiv (bzw. unitär, normal, selbstadjungiert) ist.