Universität Münster D. Bohle, W. Werner

Übungen zur Vorlesung 'Mathematik für Physiker III' **WS 09/10**

Aufgaben zur Besprechung in der Woche vom **23.11.09** bis **29.11.09**

Aufgabe XI: Zeigen Sie, dass die Bogenlänge einer Kurve nicht von ihrer Parametrisierung abhängt. (D. h. : Ist $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ eine Kurve und $\varphi : [c,d] \to [a,b]$ eine stetig differenzierbare, bijektive, monoton wachsende Abbildung so gilt $L(\gamma) = L(\gamma \circ \varphi)$.)

Aufgabe XII: Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ ein Weg, der den Einheitskreis einmal entgegen dem Uhrzeigersinn durchläuft und sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}$. Geben Sie ein γ an und berechnen Sie $\int \langle f, d\gamma \rangle$. Ändert sich der Wert des Integrals wenn γ im Uhrzeigersinn läuft.

Aufgaben zur Abgabe bis zum **01.12.09**, **13:00 Uhr**

Aufgabe 21: Zeigen Sie durch ein Gegenbeispiel, dass es kein Analogon zum Mittelwertsatz der Differentialrechnung für differenzierbare Funktionen $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}^m$, $m \geq 2$ gibt.

Aufgabe 22: Seien $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ durch

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 \\ y^2 \end{pmatrix} \qquad \textit{sowie} \qquad g\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xy \\ y \end{pmatrix}$$

und $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^\alpha \end{pmatrix}$, $\alpha > 1$, gegeben.

(a) Berechnen Sie $\int \langle f, d\gamma \rangle$ und $\int \langle g, d\gamma \rangle$.

(b) Welche der Funktionen f, g besitzt ein Potential? Bestimmen Sie ein solches, falls es existert.

Aufgabe 23: Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ eine Kurve. Zeigen Sie, dass das Wegintegral $\int_\gamma f$ unabhängig von der Parametrisierung von γ ist.

Aufgabe 24: Gegeben sei ein zwischen zwei 1m hohen Pfosten, die den Abstand 2m haben, aufgehängtes Seil. Mathematisch kann man dieses Seil (symmetrisch zur y-Achse) durch $y : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $y(x) = a\cosh(\frac{x}{a}) + 1 = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right) + 1$ beschreiben, wobei sich die Konstante $a \in \mathbb{R}$ als Verhältnis der horizontalen Komponente der Spannung des Seils und seines Gewichts pro Meter auffassen lässt.

(a) Berechnen Sie die Länge des Seils in Abhängigkeit von a.

(b) In der Praxis nähert man y durch eine Parabel an. Entwickeln Sie y in ein Taylorpolynom zweiten Grades um 0 und berechnen Sie die Länge der so gewonnenen Kurve.

Hinweis zu (b): Erinnern Sie sich, wie wir damals das Integral über den Kreis berechnet haben.