Übungen zur Vorlesung 'Mathematik für Physiker III' WS 09/10

Aufgaben zur Besprechung in der Woche vom **30.11.09** bis **06.12.09**

Aufgabe XIII: Ist das Vektorfeld $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x^3 + 2xyz \\ x^2z + 2yz^2 \\ x^2y + 2y^2z \end{pmatrix}$$

ein Gradientenfeld? Wenn ja, bestimmen Sie ein Potential durch Wegintegration.

Aufgabe XIV: Ist f ein stetiges Vektorfeld auf einem Gebiet $G \subseteq \mathbb{R}^p$, so gibt es, neben der Wegintegration, noch eine andere Methode eine Stammfunktion für f zu konstruieren. Diese Methode bedient sich der unbestimmten Integration. Wir illustrieren diese am zweidimensionalen Fall. Sei also $f = (f_1, f_2)$, dann wird man zuerst prüfen ob die Integrabilitätsbedingung $\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\partial f_2}{\partial x}$ erfüllt ist. Ist sie verletzt, so kann f keine Stammfunktion besitzen. Können wir sie aber verifizieren, so wird man - zunächst ohne definitiv zu wissen ob f tatsächlich eine Stammfunktion besitzt - den Ansatz $\operatorname{grad} \varphi = f$, also

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = f_1, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = f_2$$

machen. Aus der ersten Gleichung erhalten wir

$$\varphi(x, y) = \int f_1(x, y) dx + g(y)$$

mit einer willkürlichen „Integrationskonstanten“(d.h. einer nicht mehr von der Integrationsveränderlichen x abhängenden Größe) $g(y)$. Nehmen wir g als differenzierbar an, so folgt

$$\frac{\partial}{\partial y} \int f_1(x, y) dx + \frac{d}{dy} g(y) = \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) = f_2(x, y)$$

also

$$\frac{d}{dy} g(y) = f_2(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \int f_1(x, y) dx.$$

Durch nochmalige unbestimmte Integration gewinnt man daraus g (wobei es auf die - diesmal echte - Integrationskonstante nicht ankommt) und prüft nun durch Differentiation nach, ob

$$\varphi(x, y) := \int f_1(x, y) dx + g(y)$$

wirklich eine Stammfunktion von f ist.

Bestimmen Sie mit der oben vorgestellten Methode eine Stammfunktion zu f, wobei f gegeben sei durch $f(x, y) = (-\frac{\tan y}{x^2} + 2xy + x^2, \frac{1}{x \cos^2 y} + x^2 + y^2)$ für alle x, die von 0 und alle y, die von den Nullstellen von Kosinus verschieden sind.

Aufgaben zur Abgabe bis zum **02.12.09**, **13:00 Uhr**

Aufgabe 25: Betrachten Sie das Vektorfeld $F\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-y/(x^2+y^2)\\x/(x^2+y^2)\end{pmatrix}$ und den Weg $\gamma : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = R\begin{pmatrix}\cos(t)\\\sin(t)\end{pmatrix}$ mit $R > 0$. Genügt F den Integrabilitätsbedingungen $\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}$, $i,j = 1,2$? Berechnen Sie $\int \langle F, d\gamma\rangle$. Widersprechen Ihre Ergebnisse nicht einem Satz aus der Vorlesung?

Aufgabe 26: Seien p, q stetige Vektorfelder auf einem Gebiet $G \subseteq \mathbb{R}^2$. Ist die Differentialgleichung $p(x,y)+q(x,y)y' = 0$ nicht exakt, so kann man versuchen sie durch Multiplikation mit einer auf G stetigen und nirgends verschwindenden Funktion $\mu(x,y)$ (Euler Multiplikator genannt) zu einer exakten Gleichung zu machen.

(a) Welche Bedingung muss μ erfüllen, damit

$$\mu(x,y)p(x,y) + \mu(x,y)q(x,y)y' = 0$$

exakt ist?

(b) Seien p und q stetig partiell differenzierbar und sei G sternförmig. Zeigen Sie: Hängt die Funktion

$$f := \frac{1}{q}\left(\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial x}\right)$$

allein von x ab, so ist $\mu(x) := \exp\left(\int f(x)dx\right)$ ein (nur von x abhängender) Euler Multiplikator.

Aufgabe 27: Lösen Sie folgende Differentialgleichungen:

(a) $4x^3y + y^2y' + x^4y' = 0$ mit dem Verfahren aus Aufgabe XIV.

(b) $x^2 + y - xy' = 0$.

Aufgabe 28:

(a) Finden Sie eine Differentialgleichung $y' = f(x,y)$ die als Lösungsmenge die Geradenschaar $y(x) = cx$, $c \in \mathbb{R}$, hat.

(b) Welche geometrische Bedeutung hat für zwei differenzierbare Funktionen $y, \widetilde{y} : [a,b] \to \mathbb{R}$ die Bedingung: Falls für $x_0 \in [a,b]$ $y(x_0) = \widetilde{y}(x_0)$ ist, so gilt $\widetilde{y}'(x_0)y'(x_0) = -1$

(c) Man bestimme diejenigen Funktionen welche die Bedingung aus (b) für die gesamte Geradenschaar aus (a) erfüllen. Dabei darf benutzt werden, dass sich in jedem Punkt im $\mathbb{R}^2$ genau eine Gerade mit einer Funktion schneidet.