

Mathematik für Physiker III

(Kurzskript)

VIII. Hilberträume

1. Theorie

A. Orthonormalsysteme Ein euklidischer (unitärer) Vektorraum ist ein reeller (komplexer) Vektorraum, der mit einem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ versehen ist¹ Eine Teilmenge $\{e_i \mid i \in I\}$ von V nennt man ein *Orthogonalsystem*, falls für $i \neq j$ gilt $\langle e_i, e_j \rangle = 0$ sowie ein *Orthonormalsystem*, für den Fall, daß darüberhinaus $\|e_i\|^2 = \langle e_i, e_i \rangle = 1$ für alle $i \in I$ gilt. Ein Orthogonalsystem $\{e_i \mid i \in I\}$ ist stets linear unabhängig und für die Koordinaten v_i von $\vec{v} = \sum_{i \in I} v_i e_i \in \text{lin} \{e_i \mid i \in I\}$ gilt

$$v_i = \frac{\langle \vec{v}, e_i \rangle}{\langle e_i, e_i \rangle}.$$

Ein wichtiges Beispiel: Versieht man den Raum der stetigen Funktionen $[-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_a^b f(t) \overline{g(t)} dt,$$

so bilden die Exponentialfunktionen $t \mapsto \exp(ikt)$, $k \in \mathbb{Z}$ ein Orthonormalsystem.

¹Im letzten Semester hatten wir reelle Skalarprodukte betrachtet; ein komplexes *hermitesches* Skalarprodukt immer noch positiv definit, komplex linear in der ersten Variablen, und für alle $x, y \in V$ gilt

$$\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}.$$

Damit ist ein solches Skalarprodukt *konjugiert* linear bzgl. der zweiten Variablen, also, für alle $x, y \in V$, $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$\langle x, \lambda y_1 + y_2 \rangle = \bar{\lambda} \langle x, y_1 \rangle + \langle x, y_2 \rangle.$$

Eine jede linear unabhängige Teilmenge $\{\vec{b}_i \mid i \in I\}$ mit abzählbarer Indexmenge I läßt sich vermöge des Gram-Schmidt-Verfahrens in ein Orthonormalsystem verwandeln (insbesondere besitzt aus diesem Grund jeder endlichdimensionale euklidische bzw. unitäre Vektorraum eine Orthonormalbasis). Dazu setzt man $e_1 = \vec{b}_1 / \|\vec{b}_1\|$ sowie induktiv

$$e_{n+1} = \frac{e_{n+1}^0}{\|e_{n+1}^0\|} \quad \text{mit} \quad e_{n+1}^0 = \vec{b}_{n+1} - \sum_{\nu=1}^n \langle \vec{b}_{n+1}, e_\nu \rangle e_\nu.$$

Versieht man z.B. den Raum der auf dem Intervall $[-1, 1]$ definierten, reellwertigen Polynome mit dem Skalarprodukt $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(t)g(t) dt$, so führt dieses Verfahren auf das Orthonormalsystem der Legendre-Polynome,

$$P_n(x) := \frac{1}{2^n n!} \sqrt{\frac{2}{2n+1}} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n.$$

B. Hilberträume Die in A. angegebene Formel zur Bestimmung der Koordinaten eines Vektors $\vec{v} \in V$ macht natürlich auch dann noch Sinn, wenn das zugrundeliegende Orthonormalsystem unendlich ist. Für die (einzig in Frage kommenden) Koeffizienten $v_k = \langle \vec{v}, e_k \rangle$ des Vektors $\vec{v} \in V$ gilt stets die Besselsche Ungleichung:

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} |v_k|^2 \right)^{1/2} \leq \|\vec{v}\|_2.$$

Ob und in welcher Weise die (formal gebildete) Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \langle \vec{v}, e_k \rangle e_k$ tatsächlich \vec{v} darstellt, hängt von Konvergenzbetrachtungen ab. Da auch in diesem Fall das Cauchy-Kriterium ein sehr wichtiges Hilfsmittel darstellen kann, verwendet man die folgende

Definition 1 Ein \mathbb{K} -Vektorraum H mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und Norm

$$\|x\|_2 := \langle x, x \rangle^{1/2}$$

heißt Hilbertraum genau dann, wenn jede Cauchy-Folge in H konvergiert, H also vollständig ist.

Darüberhinaus nennt man ein (abzählbares) Orthonormalsystem $\{e_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ des unitären (euklidischen) Vektorraums V *vollständig*, falls aus $\langle \vec{v}, e_k \rangle = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$ stets $\vec{v} = 0$ folgt. In Hilberträumen sind es nun die vollständigen Orthonormalbasen, die die geeignete Verallgemeinerung des Begriffs Basis darstellen: Hier gilt $\vec{v} = \sum_{k=1}^{\infty} \langle \vec{v}, e_k \rangle e_k$ sowie $\|\vec{v}\|_2^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\langle \vec{v}, e_k \rangle|^2$. Beispiele für Hilberträume sind:

- Die bisher von uns betrachteten endlichdimensionalen Vektorräume \mathbb{K}^n mit dem Skalarprodukt

$$\langle x, y \rangle = \sum x_i \bar{y}_i$$

- Der Raum

$$\ell^2 = \left\{ (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid x_n \in \mathbb{K} \text{ und } \sum |x_n|^2 < \infty \right\}$$

mit dem (formal ähnlich wie zuvor definierten) Skalarprodukt $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \bar{y}_i$. Da es hier aber um einen Grenzwert geht, ist zu überprüfen, dass diese Reihe tatsächlich konvergiert, was mit Hilfe der Cauchy-Scharzschen Ungleichung aber gar nicht so schwer ist.— Dass ℓ^2 vollständig ist, dauert etwas länger einzusehen. Man startet hierzu mit einer Cauchy-Folge (ξ_n) und beobachtet zunächst, dass für jeden festen Index $N \in \mathbb{N}$ die jeweils n -ten Folgenglieder $\xi_{n,N}$ für festgehaltenes N eine Cauchy-Folge in \mathbb{K} bilden. Da \mathbb{K} vollständig ist, gibt es eine Folge $\xi_0 = (\xi_{0,N})_{N \in \mathbb{N}}$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_{n,N} = \xi_{0,N}$ für alle $N \in \mathbb{N}$. Die noch verbleibende Arbeit besteht darin zu zeigen, dass $\xi_0 \in \ell^2$ und $\|\xi_n - \xi_0\|_2 \rightarrow 0$.

- Auf dem Vektorraum der stetigen Funktionen $[a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ wird durch

$$\int_a^b f(t) \overline{g(t)} dt$$

ebenfalls ein Skalarprodukt definiert. (Bei der positiven Definitheit wird die Stetigkeit der Funktionen benötigt.) Dieser Raum ist *nicht* vollständig. (Die Idee hier ist, dass es Folgen stetiger Funktionen gibt, die im Sinne der $\|\cdot\|_2$ -Norm gegen Funktionen mit z.B. Sprungstellen konvergieren können.) Ähnlich wie beim Übergang von \mathbb{Q} zu \mathbb{R} kann man eine *Vervollständigung* definieren und gelangt so zum Raum $L_{\mathbb{K}}^2[a, b]$, in dem jede "Funktion" beliebig genau (im Sinne der $\|\cdot\|_2$ -Norm) von einer stetigen Funktion approximiert werden kann.

- Mit genau demselben Skalarprodukt kann man den Vektorraum

$$C_{\mathbb{K}}(\mathbb{R})_2 = \left\{ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K} \text{ stetig} \mid \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt < \infty \right\}$$

versehen und dann vervollständigen, was zum Raum $L_{\mathbb{K}}^2(\mathbb{R})$ führt.

Vor allem das letzte Beispiel spielt eine wichtige Rolle in der Quantenmechanik, da die "Funktionen" $\psi \in L^2(\mathbb{R})$, die sogenannten Wellenfunktionen, hier eine sehr konkrete Bedeutung haben:

$$\int_a^b |\psi(t)|^2 dt$$

ist die Aufenthaltswahrscheinlichkeit des der Funktionen ψ zugeordneten Teilchens im Intervall $[a, b]$. (Damit diese Aussage Sinn macht, sollte natürlich $\|\psi\|_2 = 1$ sein.)

C. Fourierreihen Die Funktionen $(\exp(ikt))_{k \in \mathbb{Z}}$ bilden eine Orthonormalbasis für den Raum der Raum $L^2[-\pi, \pi]$. Damit ist jedes Element f in diesem Raum (also z.B. jede stetige Funktion) der Grenzwert der Folge $(\sum_{n=-N}^N c_n \exp(ikt))_{N \in \mathbb{N}}$, wobei

$$c_n = \langle f, \exp(int) \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt.$$

Dabei heißt *Grenzwert* hier, dass für $N \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \left\| f - \sum_{n=-N}^N c_n \exp(ikt) \right\|_2 &= \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \left| f(t) - \sum_{n=-N}^N c_n \exp(ikt) \right|^2 dt \right)^{1/2} \longrightarrow 0, \end{aligned}$$

Dieser Konvergenztyp einer Funktionenfolge ist neu, und beschreibt recht gut den Typ Konvergenz, den man im Rahmen der wahrscheinlichkeitstheoretischen Interpretation der Wellenfunktionen benutzen würde. Auf beschränkte Intervallen ergibt die gleichmäßige Konvergenz die Konvergenz bezüglich dieser Hilbertraumnorm. Die punktweise Konvergenz häufig auch. Aus der Hilbertraum-Konvergenz folgt im allgemeinen aber weder punktweise noch gleichmäßige Konvergenz. Für Fourierreihen gilt der folgende

Satz 1 *Es sei $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ eine Funktion, für die an jeder Stelle in $[-\pi, \pi]$ der rechts- und linksseitige Grenzwert existiert, sowie*

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(\lim_{t \rightarrow x+} f(t) + \lim_{t \rightarrow x-} f(t) \right) & \text{falls } x \in (-\pi, \pi) \\ \frac{1}{2} \left(\lim_{t \rightarrow -\pi+} f(t) + \lim_{t \rightarrow \pi-} f(t) \right) & \text{falls } x = \pm\pi \end{cases}.$$

- (i) *Ist f die Differenz zweier monoton steigender Funktionen, so konvergiert die Fourierreihe von f punktweise gegen \tilde{f} .*
- (ii) *Ist f stetig differenzierbar, so konvergiert die Fourierreihe von f gleichmäßig gegen \tilde{f} .*

Im ersten Fall ist die Voraussetzung des Satzes automatisch erfüllt, im zweiten Fall modifiziert \tilde{f} die Funktion f höchstens an den Punkten $\pm\pi$.

Wir skizzieren hier den Beweis, dass eine 2π -periodische, zweifach stetige Funktion $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ eine gleichmäßig gegen f konvergente Fourierreihe

besitzt. Es sei f eine solche Funktion. Eine doppelte partielle Integration sowie die Periodizität von f ergeben für die Fourierkoeffizienten

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt = \frac{1}{2\pi n^2} \int_{-\pi}^{\pi} f''(t) e^{-int} dt$$

weshalb

$$|c_n| \leq \frac{1}{n^2} \|f''\|_{\infty}.$$

Damit ist die Reihe $\|f''\|_{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} n^{-2}$ eine absolut konvergente Majorante der Fourierreihe $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp(int)$ bezüglich der Norm $\|\cdot\|_{\infty}$. Nutzt man die Vollständigkeit des Raums der stetigen Funktionen auf $[-\pi, \pi]$ bezüglich dieser Norm (also der gleichmäßigen Konvergenz) aus, so muss $\sum_{n=-N}^N c_n \exp(int)$ gleichmäßig gegen eine zunächst noch unbekannt Funktion f_0 konvergieren. Da aber

$$\left\| f_0 - \sum_{n=-N}^N c_n \exp(int) \right\|_2 \leq 2\pi \left\| f_0 - \sum_{n=-N}^N c_n \exp(int) \right\|_{\infty}$$

konvergiert $\sum_{n=-N}^N c_n \exp(int)$ auch bezüglich der Norm $\|\cdot\|_2$ gegen f_0 . Da die Grenzwerte dieser Konvergenz auf dem Raum der stetigen Funktionen eindeutig bestimmt sind, muss $f = f_0$ sein und $\sum_{n=-N}^N c_n \exp(int)$ konvergiert gleichmäßig gegen f .

D.Orthogonale Projektionen Menschliches Sehen und Hören basiert auf einer Approximation des Farb- bzw. Tonraums durch Überlagerungen weniger fester Grundschwingungen. Versucht man, sich diese Tatsache technisch zu Nutze zu machen, so stößt man letztlich auf das folgende Problem: Ist H_0 ein (abgeschlossener) Unterraum des Hilbertraums H (der Raum der Linearkombinationen endlich vieler, fest gewählter Grundschwingungen) und $h \in H$ außerhalb von H_0 gewählt (etwa ein "echter", aus beliebig vielen Oberschwingungen zusammengesetzter Ton), gibt es dann eine bestmögliche Approximation an h in dem Raum H_0 und wie kann man diese berechnen?

Satz 2 *Es sei H ein Hilbertraum, $H_0 \subset H$ ein abgeschlossener Unterraum und $h \in H \setminus H_0$. Dann gibt es genau ein $h_0 \in H_0$ mit*

$$d(h, H_0) := \inf_{c \in H_0} \|h - c\| = \|h - h_0\|.$$

Dieser Vektor ist durch die Bedingung

$$\langle h - h_0, c \rangle = 0 \quad \text{für alle } c \in H_0$$

bestimmt.

Hier handelt es sich offensichtlich um eine Extremwertaufgabe für die Funktion $\varphi : H_0 \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi(c) = \|c - h\|^2$ (das Quadrat führt hier auf ein zum ursprünglichen äquivalenten Problem, das rechnerisch einfach ist). Es ist nun

$$\varphi'(h_0) : c \longmapsto \langle h_0 - h, c \rangle + \langle c, h_0 - h \rangle = 2 \operatorname{Re} \langle h_0 - h, c \rangle,$$

so dass die notwendige Bedingung für das Vorliegen eines Extremalwerts bei h_0 äquivalent zu der Bedingung $\operatorname{Re} \langle h - h_0, c \rangle = 0$ für alle $c \in C$ ist. Da H_0 ein (komplexer) Unterraum ist, ist diese wiederum gleichwertig mit

$$\langle h - h_0, c \rangle = 0 \quad \text{für alle } c \in C.$$

Wir leiten sogleich noch einmal ab und erhalten

$$\varphi''(h_0)(c_1, c_2) = 2 \operatorname{Re} \langle c_1, c_2 \rangle,$$

was eine positiv definite Linearform ist. Für jeden Punkt also, an dem φ' verschwindet, liegt ein lokales Minimum vor. Wir hatten im letzten Semester ein ganz ähnliches Problem behandelt, bei dem die Existenz einer solchen Extremalstelle schließlich mit Hilfe eines Kompaktheitsarguments nachgewiesen werden konnte. Dies steht uns im Unendlichdimensionalen nicht mehr zur Verfügung. Wir verwenden hier stattdessen die (leicht aus der Definition der Norm sich ergebende) sogenannte Parallelogrammgleichung: Für alle $x, y \in H$ gilt

$$2(\|x\|^2 + \|y\|^2) = \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2$$

Um einen Punkt h_0 zu finden, an dem φ' verschwindet, beginnen wir mit einer Folge (c_n) in H_0 mit $d(h, C) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|h - c_n\| =: \alpha$. Es gilt dann

$$\begin{aligned} \|c_n - c_m\|^2 &= 2(\|h - c_n\|^2 + \|h - c_m\|^2) - \|h - c_n + h - c_m\|^2 \leq \\ &\leq 2(\|h - c_n\|^2 + \|h - c_m\|^2) - 4\alpha^2. \end{aligned}$$

Die rechte Seite aber konvergiert für $n, m \rightarrow \infty$ gegen 0, da $(\|h - c_n\|^2)$ gegen α^2 konvergiert. Hier verwenden wir nun die Tatsache, dass H vollständig ist sowie die Abgeschlossenheit von H_0 : $\lim c_n =: h_0$ existiert und liegt in H_0 . Wir zeigen schließlich noch die Eindeutigkeit. Hieraus folgt insbesondere, dass die (dann einzige) Nullstelle von φ' ein globales Minimum liefert. Es seien dazu h_0 und h_1 beides Nullstellen. Es folgt dann insbesondere

$$\langle h - c_0, c_1 - c_0 \rangle = 0 \quad \text{sowie} \quad \langle h - c_1, c_0 - c_1 \rangle = 0.$$

Löst man die linken Seiten auf und addiert die entstandenen Gleichungen, so findet man

$$\|c_0 - c_1\|^2 = \|c_0\|^2 - 2\langle c_0, c_1 \rangle + \|c_1\|^2 = 0,$$

also bereits $c_0 = c_1$.

Dieser Satz hat die folgende Konsequenz: Ist $U \subset H$ ein Unterraum und

$$U^\perp = \{h \in H \mid \langle h, u \rangle = 0 \text{ für alle } u \in U\},$$

dann gilt $H = U \oplus U^\perp$. Ist nämlich $h \in H$, so wähle $h_0 \in U$ mit $\|h - h_0\| = \inf_{u \in U} \|h - u\|$. Nach dem gerade bewiesenen Satz gilt $\langle h - h_0, u \rangle = 0$ für alle $u \in U$, d.h. $h - h_0 \in U^\perp$. Damit folgen Eindeutigkeit und Existenz aus dem Korollar.

E.Stetige lineare Operatoren Wie im letzten Semester definieren wir die Norm eines Operators $T : H_1 \rightarrow H_2$ zwischen den Hilberträumen $H_{1,2}$ durch

$$\|T\| = \sup_{\|h\| \leq 1} \|Th\|$$

Man sieht leicht, dass für alle $x \in H_1$ gilt $\|Tx\| \leq \|T\| \|x\|$.

Satz 3 Für eine lineare Abbildung $T : H_1 \rightarrow H_2$ sind äquivalent:

- (i) T ist stetig
- (ii) T ist stetig im Nullpunkt
- (iii) Die Norm von T ist endlich.

Dabei folgt natürlich (ii) sofort aus (i). Ist (iii) verletzt, so findet man eine Folge (h_n) mit $\|h_n\| \leq 1$ und $\|Th_n\| \geq n$. Dann aber ist $x_n = h_n \|Th_n\|^{-1}$ eine Nullfolge mit $\|T(x_n)\| = 1$, und T kann unmöglich stetig am Nullpunkt sein. Deshalb impliziert (ii) die Bedingung (iii). Ist (iii) erfüllt, so gilt für jede Folge (h_n) mit $h_n \rightarrow h_0$

$$\|Th_n - Th_0\| \leq \|T\| \|h_n - h_0\|,$$

und T ist stetig bei h_0 .

Satz 4 Für jede stetige, lineare Abbildung $\varphi : H \rightarrow \mathbb{K}$ existiert genau ein $y \in H$ mit

$$\varphi(x) = \langle x, y \rangle \quad \text{und} \quad \|(\|\varphi)\| = \|(\|y)\|$$

Ist nämlich $\varphi \in H' \setminus \{0\}$ (der Fall $\varphi = 0$ ist klar), so ist aufgrund der Stetigkeit von φ der Raum $\ker \varphi$ abgeschlossen, verschieden von H und $H = \ker \varphi \oplus (\ker \varphi)^\perp$. Wir können daher einen Vektor $y_0 \in (\ker \varphi)^\perp$ finden mit $\varphi(y_0) = 1$. Dann gilt für alle $x \in H$

$$\varphi(x - \varphi(x)y_0) = \varphi(x) - \varphi(x)\varphi(y_0) = 0,$$

und es folgt

$$0 = \langle x - \varphi(x)y_0, y_0 \rangle = \langle x, y_0 \rangle - \varphi(x)\|y_0\|^2$$

so dass für $y = y_0 \|y_0\|^{-2}$ gilt $\langle x, y \rangle = \varphi(x)$. Dass $\|\varphi\| = \|y\|$ folgt aus der Cauchy-Schwarz-Ungleichung.

Aufgrund von Satz 4 hat es sich in der Quantenmechanik eingebürgert, die Vektoren in H und die Abbildungen in H' durch die Bezeichnung *Bra* und *Ket* zu kennzeichnen und die Schreibweise $\langle h|$ für einen ‘‘Bra-Vektor’’ und $|h\rangle$ für ein Element in H' , dargestellt durch dasselbe $h \in H$ zu verwenden.

F. Adjungierte Satz 4 erlaubt es, die adjungierte Abbildung, die wir bereits im letzten Semester eingeführt hatten, koordinatenfrei einzuführen: Ist $A : H \rightarrow H$ gegeben, so definiert

$$x \longmapsto \langle Ax, y \rangle$$

eine stetige lineare Abbildung $H \rightarrow \mathbb{K}$. Der letzte Satz produziert daher einen Vektor $A^*y \in H$ mit

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^*y \rangle \quad \text{für alle } x \in H$$

Betrachtet man nun die Abbildung

$$A^* : H \rightarrow H, \quad h \longmapsto A^*h,$$

so zeigt sich, dass diese linear und stetig (mit $\|A^*\| = \|A\|$) ist. Recht schnell sieht man auch ein, dass $(A + \lambda B)^* = A^* + \bar{\lambda}B^*$ und $A^{**} = A$ gilt. Ist A bezüglich einer ON-Basis als Matrix $A = (\alpha_{ij})$ dargestellt, so ist $(\bar{\alpha}_{ji})$ die Matrixdarstellung von A^* .

Definition 2 *Es sei H ein Hilbertraum über \mathbb{K} sowie $A : H \rightarrow H$ linear und stetig. Dann nennt man A*

- (a) selbstadjungiert, falls $A^* = A$ ist,
- (b) positiv, falls A selbstadjungiert ist und für alle $h \in H$ gilt $\langle Ah, h \rangle \geq 0$,
- (c) unitär, falls $A^*A = AA^* = \text{Id}_H$ ist sowie
- (d) normal, falls $A^*A = AA^*$ gilt.

Die Bedeutung der normalen Operatoren besteht darin, dass genau sie es sind, die im Fall endlicher Dimension eine ON-Basis aus Eigenvektoren besitzen. Im unendlichdimensionalen Fall gilt ein ähnliches Resultat.

2. Anwendungen

A. Die Wellengleichung Eine schwingende Saite lässt sich durch eine Funktion $u : [-\pi, \pi] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ beschreiben, die (in der ersten Variablen) vom Ort x sowie (in der zweiten Variablen) von der Zeit t abhängt, und deren Wert die Auslenkung der Saite $u(x, t)$ von der Ruhelage bei x zum Zeitpunkt t beschreibt. Die Bewegung der Saite wird dann gut durch die (räumlich) eindimensionale Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

beschrieben. Hier ist c zunächst eine Konstante, die von den physikalischen Eigenschaften der Saite abhängt, am Ende aber die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Wellen angibt. Eine einfache, häufig angewandte Methode, alle Funktionen u zu bestimmen, die hier in Erscheinung treten, besteht darin, zunächst eine Menge spezieller Lösungen anzugeben, diese dann zu einer möglichst allgemeinen Lösung zu überlagern, und sodann schließlich einen abstrakten mathematischen Satz zu verwenden, der garantiert, dass man auf diese Weise tatsächlich alle Lösungen gefunden hat.

Der erste Schritt auf diesem Weg ist auch unter der Bezeichnung *Trennung der Veränderlichen* bekannt. Man versucht dabei, alle Lösungen der Form $u(x, t) = \varphi(x)\psi(t)$ aufzufinden. Geht man mit diesem Ansatz in die Wellengleichung, so erhält man (für nicht allzu oft verschwindende Funktionen)

$$\frac{\psi''(t)}{\psi(t)} = \frac{1}{c^2} \frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)},$$

was die Idee hinter diesem Ansatz bloßlegt: Da die beiden Seiten dieser Gleichung ausschließlich von zwei unterschiedlichen Variablen abhängen, kann keine der Seiten wirklich von diesen abhängen, und so müssen beide Funktionen konstant sein. Man erhält die Gleichungen

$$\psi'' = \mu_0 \psi \quad \text{sowie} \quad \varphi'' = \frac{\mu_0}{c^2} \varphi$$

Wir vermuten², dass die Lösungen zeitlich periodisch ablaufen, und setzen daher $\mu_0 = -\omega^2$. Wir erhalten dann die allgemeinen Lösungen

$$\psi(t) = a_1 \cos \omega t + b_1 \sin \omega t \quad \text{sowie} \quad \varphi(x) = a_2 \cos \left(\frac{\omega x}{c} \right) + b_2 \sin \left(\frac{\omega x}{c} \right)$$

Da die Funktionen φ an den Randpunkten verschwinden müssen, kommen nur ganzzahlige Werte als Frequenzen für φ in Frage, wir erhalten $\omega = kc$,

²Eine interessante Stelle; ähnlich wird auch an vielen anderen Stellen vorgegangen, und der Autor fühlt sich manchmal etwas unwohl, wenn er bedenkt, dass auf diese Art und Weise Lösungen nicht weiter betrachtet werden, die die allgemeine Lebensqualität doch gehörig einschränken könnten.— Im vorliegenden Fall kann man allerdings mit den Randwerten argumentieren und ist damit auf der sicheren Seite.

$k \in \mathbb{N}_0$, der Cosinusanteil in φ kann nicht mehr in Erscheinung treten, und wir erhalten damit insgesamt die Lösungen

$$u_n(x, t) = \sin nx (a \cos nct + b \sin nct), \quad a, b \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}.$$

Da die Wellengleichung linear ist, erhält man neue Lösungen, indem man die Funktionen u_n linear kombiniert und vielleicht auch noch zu passend zu definierenden Grenzwerte übergeht. Die Klasse von Lösungen, die man auf diese Art und Weise erhält, besteht aus Funktionen der Form

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n u_n(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sin nx (a_n \cos nct + b_n \sin nct)$$

Kennt man von u das Verhalten zum Zeitpunkt $t = 0$, also Orte und Geschwindigkeiten der beteiligten "Massenpunkte" auf der Saite, oder, mathematisch,

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= f(x), & f(-\pi) &= f(\pi) = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) &= g(x), & g(-\pi) &= g(\pi) = 0, \end{aligned}$$

so kann man (zumindest bei ausreichend guter Konvergenz der Reihe für u) die Lösung $u = \sum_{n=0}^{\infty} \sin nx (a_n \cos nct + b_n \sin nct)$ in das Anfangsproblem einsetzen, und gelangt so zu der Bedingung

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sin nx, \quad g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n nc \sin nx,$$

ein Problem, das mit Hilfe der Fourierreihen von f und g (die Randterme von f, g verschwinden!) gelöst werden kann.

Wieso kann man nun sicher sein, nicht eine Lösung (die dann vielleicht, wenn es ganz schlimm kommt, gerade die Lösung ist, die man kennen sollte) übersehen zu haben? Eine recht allgemeine Antwort ist im folgenden Satz enthalten:

Satz 5 Sind F und f_ν in einer Umgebung der 0 analytische (d.h. in eine Potenzreihe entwickelbare) Funktionen, dann besitzt das nicht-lineare Cauchy-Problem

$$\frac{\partial^k h}{\partial t^k} = F \left(x, t, \left(\frac{\partial^{\nu+|\alpha|}}{\partial t^\nu \partial x^\alpha} h \right)_{|\alpha|+\nu \leq k} \right)$$

mit den Anfangswertbedingungen

$$\frac{\partial^\nu h}{\partial t^\nu}(x, 0) = f_\nu(x), \quad \nu = 1, \dots, k-1,$$

eine eindeutig bestimmte analytische Lösung in einer (weiteren) Umgebung des Nullpunkts.

Die Lösung eines solchen Schwingungsproblems hängt sehr stark von der Geometrie des schwingenden Objekts ab. Für eine kreisförmige, an ihrem Rand eingespannte Membran (vom Radius a) z.B. arbeitet man mit Funktionen $u : \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| \leq 1\} \rightarrow \mathbb{R}$, die dann der zweidimensionalen Schwingungsgleichung

$$u_{tt} = k^2(u_{xx} + u_{yy})$$

genügen müssen (hier haben wir eine übliche Kurzform für die partiellen Ableitungen verwendet). Zweckmäßiger Weise führt man in diesem Fall Polarkoordinaten r und θ ein. Mit Hilfe der Trennung der Veränderlichen kann man zunächst Funktionen der Form $u(x, r, \theta) = T(t)A(r, \theta)$ betrachten. $T(t)$ verhält sich analog dem eindimensionalen Fall; die Funktion A muss der Gleichung

$$A_{rr} + \frac{1}{r}A_r + \frac{1}{r^2}A_{\theta\theta} + k^2A = 0.$$

genügen. Mit der Randwertbedingung

$$A(a, \theta) = 0 \quad \text{für alle } \theta \in [0, 2\pi)$$

und nochmaliger Trennung $A(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta)$ gelangt man erstens zu

$$\Theta'' + n^2\Theta = 0,$$

wobei die Konstante hier wieder der 2π -Periodizität von Θ geschuldet ist. Man erhält

$$\Theta = \alpha \cos n\theta + \beta \sin n\theta.$$

Die Differentialgleichung für R ist andererseits

$$r^2R'' + rR' + r^2k^2R - n^2R = 0,$$

die fast die *Besselsche Differentialgleichung* ist. Die Funktion R besitzt nämlich die Form

$$R(r) = \gamma J_n(\rho),$$

wobei die Bessel-Funktion $J_n(\rho)$ die (echte) Bessel-Gleichung vom Index n ,

$$\rho^2 J_n'' + 2\rho J_n' + (\rho^2 - n^2)J_n = 0,$$

erfüllt mit $\rho = kr$. Diese Funktionen sind nicht ganz einfach in den Griff zu bekommen. Aus der Differentialgleichung kann man eine Potenzreihenentwicklung für J_n herleiten, und mit etwas mehr Theorie kann man zeigen, dass jede dieser Funktionen unendlich viele Nullstellen für jeden Wert n besitzt, die wir mit $\rho_{m,n}$ bezeichnen. Die Bedingung $A(a, \theta) = 0$ ist erfüllt, falls

$$k = k_{m,n} = \frac{\rho_{m,n}}{a}$$

Die auf diese Weise gefundenen Klasse von Lösungen sind dann gegeben durch

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} (a_n \sin(n\theta) + b_n \cos(n\theta)) J_n(k_{m,n}r).$$

Um nun schließlich noch beliebige Anfangswertaufgaben lösen zu können, verwendet man wie im voranstehenden Beispiel die Tatsache, dass auch die Besselfunktionen Anlass zu ON-Basen geben. Und zwar sind die Besselfunktionen orthogonal bezüglich des Skalarprodukts

$$\langle f, g \rangle_x = \int_0^b x f(x) \overline{g(x)} dx$$

und man kann Funktionen $f : [0, b] \rightarrow \mathbb{C}$ in ihre sogenannte Fourier-Bessel Reihe entwickeln,

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n J_{\alpha}(\lambda_n x/b),$$

wobei λ_n die n -te Nullstelle von $J_{\alpha}(x)$ ist. Wie zuvor ergeben sich aufgrund der Orthogonalitätsbeziehung

$$\int_0^1 J_{\alpha}(x\lambda_m) J_{\alpha}(x\lambda_n) x dx = \frac{\delta_{mn}}{2} [J_{\alpha+1}(\lambda_n)]^2$$

die Koeffizienten als

$$c_n = \frac{\int_0^b J_{\alpha}(\lambda_n x/b) f(x) x dx}{\int_0^b x J_{\alpha}^2(\lambda_n x/b) dx} = \frac{\langle f, J_{\alpha}(\lambda_n x/b) \rangle}{\|J_{\alpha}(\lambda_n x/b)\|^2}.$$

Hier kann man das Nennerintegral berechnen, und man erhält

$$c_n = \frac{\int_0^b J_{\alpha}(\lambda_n x/b) f(x) x dx}{b^2 J_{\alpha\pm 1}^2(\lambda_n)/2}$$

wobei sowohl Plus- also auch Minuszeichen zum gleichen Resultat führen.

B. Die mathematischen Axiome der Quantenmechanik Das Haupteinzugsgebiet der Hilbertraumtheorie in physikalischer Hinsicht ist jedoch die Quantenmechanik. Wir schildern hier kurz das zu Grunde liegende mathematische Gerüst, das für sich genommen natürlich ohne physikalischen Hintergrund nicht viel wert ist. Hier sind die Zutaten:

- (1) Zu jedem quantenmechanischen System gehört ein Hilbertraum mit abzählbarer ON-Basis. Die Zustände eines solchen Systems sind durch die eindimensionalen Unterräume gegeben.

- (2) Ist ein System aus Teilsystemen mit den Hilberträumen H_1, \dots, H_n zusammengesetzt, so ist gehört zum Gesamtsystem das Hilbertraum-Tensorprodukt der Räume H_1, \dots, H_n ,

$$H = H_1 \otimes \cdots \otimes H_n,$$

- (3) Die physikalischen Observablen werden durch (leider meist nur dicht definierte) selbstadjungierte Operatoren A auf H repräsentiert. Der Erwartungswert der Observablen A für das System ist, wenn dieses sich im Zustand $h \in H$ befindet, gegeben durch

$$\langle A \rangle = \langle Ah, h \rangle$$

- (4) Die physikalischen Symmetrien eines Systems (z.B. Drehungen, Translationen) operieren als (anti-)unitäre Operatoren auf H .

Ein paar Kommentare zu diesen Axiomen:

(1) Physikalische Zustände entsprechen also den Punkten in H , und zwei Zustände sind dann als physikalisch gleich aufzufassen, wenn sie durch Multiplikation mit einer komplexen Zahl ineinander überführt werden können. Dass man von einer abzählbaren Hilbertraum-Basis ausgeht, liegt daran, dass man nicht glaubt, mehr als abzählbar viele Beobachtungen zu benötigen, um einen physikalischen Zustand eindeutig bestimmen zu können.

(2) Hier ist eine schnelle (und mathematisch nicht sehr hübsche) Definition des Tensorprodukts eines Hilbertraums: Ist $(e_{n,i})_{n \in \mathbb{N}}$ eine ON-Basis von H_i , so bilden die Elemente

$$e_{1,i_1} \otimes \cdots \otimes e_{n,i_n}$$

eine ON-Basis von $H_1 \otimes \cdots \otimes H_n$, d.h. die Elemente dieses Tensorprodukts lassen sich schreiben als

$$h = \sum_{i_1, \dots, i_n=1}^{\infty} \alpha_{i_1, \dots, i_n} e_{1,i_1} \otimes \cdots \otimes e_{n,i_n}$$

Außerdem definiert man

$$\begin{aligned} \left\langle \sum_{i_1, \dots, i_n=1}^{\infty} \alpha_{i_1, \dots, i_n} e_{1,i_1} \otimes \cdots \otimes e_{n,i_n}, \sum_{i_1, \dots, i_n=1}^{\infty} \beta_{i_1, \dots, i_n} e_{1,i_1} \otimes \cdots \otimes e_{n,i_n} \right\rangle &= \\ &= \sum_{i_1, \dots, i_n=1}^{\infty} \alpha_{i_1, \dots, i_n} \beta_{i_1, \dots, i_n} \end{aligned}$$

Auf diese Weise entsprechen die (stetigen) Bilinearformen $B : H_1 \times H_1 \rightarrow \mathbb{C}$ den Elementen des Dualraums $(H \bar{\times} H)'$ (und entsprechend für mehr als zwei Faktoren). Für ein nichtrelativistisches System, welches aus einer endlichen

Anzahl unterscheidbarer Teilchen besteht, entsprechen die Faktoren des Tensorprodukts den individuellen Teilchen.

(3) Die möglichen Werte, die eine Observable annehmen kann, sind die Spektralwerte. Besteht dieses nur aus Eigenwerten, so sind diese genau die Werte, die für A scharf gemessen werden können. Die sogenannten *Vektorzustände* $h \in H$ bilden nicht alle physikalisch möglichen Zustände ab. (Hinzu kommen noch Zustände, die durch positive Operatoren $\rho : H \rightarrow H$ gegeben sind. In einem solchen Zustand ist der Erwartungswert von A durch

$$\text{tr}(A\rho)$$

gegeben. Dabei bezeichnet tr die Spur eines Operators, und ρ muss so beschaffen sein, dass $\text{tr}(A\rho)$ auch tatsächlich definiert ist. Die Zustände aus (1) gewinnt man zurück, wenn man für ρ die orthogonale Projection auf den Unterraum $\mathbb{C}h$ wählt.

Schließlich ist noch anzumerken, dass die Dynamik hier komplett fehlt. Die Zeitentwicklung eines quantenmechanischen Systems regelt die Schrödinger-Gleichung

$$i\hbar \frac{d}{dt} \psi(t) = H\psi(t),$$

in der der quantenmechanische (selbstadjungierte) Hamilton-Operator in kunstvoller Weise aus dem zugehörigen klassischen Gegenstück gewonnen wird.

C. Fourier- und Laplace-Transformation Als eine kontinuierliche Variante der Fourierreihen sollte man sich die aus der Inversionsformel der Fouriertransformation hervorgehende Darstellung einer Funktion f vorstellen: Geht man von der (durch Variablentransformation gewonnenen) Fourierreihe

$$f \sim \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\frac{\pi n x}{l} i \pi} \frac{\pi}{l} \int_{-l}^l f(t) e^{-\frac{\pi n t}{l} i} dt$$

für die Funktion $f : [-l, l] \rightarrow \mathbb{R}$ aus, und deutet man diese als (unendliche) "Riemann-Summe" der Funktion $\varphi(\omega)$ zu den Intervallen $[\xi_n, \xi_{n+1}]$ und den Zwischenpunkten ξ_n mit

$$\varphi(\omega) = \frac{e^{i\omega x}}{2\pi} \int_{-l}^l f(t) e^{-i\omega t} dt \quad \text{sowie} \quad \xi_n = \frac{\pi n}{l},$$

so führt der formal ausgeführte Grenzübergang $l \rightarrow \infty$ auf die Formel

$$f(x) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt d\omega. \quad (*)$$

In diesem Ausdruck ist

$$\mathcal{F}f(\omega) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

die *Fouriertransformation* der Funktion f . Wenn man sich noch einmal vergegenwärtigt, wie diese entstanden ist, so kann man zu der Vorstellung gelangen, dass aus dem "Signal" f kontinuierlich die Frequenzanteile für jede der Frequenzen $\omega \in \mathbb{R}$ mit Hilfe des Integrals $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt$ herausgefiltert werden, und dass die so gewonnene Information $\mathcal{F}f$ auf dem Frequenzraum auch umgekehrt wieder zu $f(x)$ durch das Integral $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}f(\omega)e^{i\omega x} d\omega$ zusammengesetzt werden kann.

Die Fouriertransformation ist zunächst für alle Funktionen in dem Raum

$$L^1(\mathbb{R}) = \left\{ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid \int_{-\infty}^{\infty} |f| dx < \infty \right\}$$

definiert, der wiederum als Vervollständigung aus dem mit der Norm $\|f\|_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx$ versehenen Raum $L_0^1(\mathbb{R}) = \{f \in C(\mathbb{R}) \mid \|f\|_1 < \infty\}$ hervorgeht. Falls auch $\mathcal{F}f \in L^1(\mathbb{R})$ ist, so gilt die Beziehung (*) für f , d.h.

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}f)(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}f(\omega)e^{i\omega x} d\omega.$$

Die für die Anwendungen wichtigen Eigenschaften der Fouriertransformation und ihrer Inversen sind: \mathcal{F} ist linear, für alle Funktionen, für die dies Sinn macht (hier muss man ein wenig aufpassen), gilt

$$\mathcal{F}(xf(x)) = i(\mathcal{F}f)' \quad \mathcal{F}(f'(x)) = i\omega\mathcal{F}f(\omega)$$

und für die durch

$$f * g(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y) dy$$

definierte *Faltung* gilt

$$\mathcal{F}(f * g)(\omega) = \mathcal{F}f(\omega)\mathcal{F}g(\omega) \quad \text{sowie} \quad \mathcal{F}(fg)(\omega) = \mathcal{F}f * \mathcal{F}g(\omega).$$

Ferner läßt sich die Abbildung \mathcal{F} zu einer unitären linearen Abbildung auf den Hilbertraum $L^2(\mathbb{R})$ fortsetzen.

Eng verwandt mit der Fouriertransformation ist die *Laplace-Transformation* $\mathcal{L}f$ einer Funktion f :

$$\mathcal{L}f(s) := \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

Auch \mathcal{L} ist linear und injektiv, es gilt

$$\mathcal{L}(f^{(k)})(s) = s^k \mathcal{L}f - \sum_{\kappa=0}^{k-1} s^\kappa f^{(\kappa)}(0)$$

sowie (neben vielen weiteren Eigenschaften) $\mathcal{L}(x^n f(x)) = (-1)^n (\mathcal{L}f)^{(n)}(s)$. Unter gewissen Voraussetzungen kann man mit Hilfe der Inversionsformel der Fouriertransformation und mit Methoden der Funktionentheorie zeigen, daß die Inverse der Laplace-Transformierten, \mathcal{L}^{-1} durch

$$\mathcal{L}^{-1}F(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F(s)e^{ts} ds, \quad \sigma > 0.$$

gegeben ist.

VI. Integralrechnung im \mathbb{R}^n

1. Integrale für Kurven

A. Gewöhnliche Integrale für Funktionen, die auf Kurven definiert sind Das Integral einer stetigen, reellwertigen Funktion f entlang einer Kurve $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ mißt die “Fläche unterhalb von f ” in der Welt der Kurve. Es berechnet sich zu

$$\int_a^b f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt.$$

In den Anwendungen tritt dieser Integraltyp vor allem dann auf, wenn “nahezu eindimensionale” Gebilde in idealisierter Weise untersucht werden müssen. Für den Spezialfall $f(\vec{x}) = 1$ erhält man die Bogenlänge von γ durch $\int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$. Bei geometrischen Untersuchungen von Kurven ist es oft günstig, die Bogenlänge als Parameter von γ einzuführen: Ist $\alpha(t)$ die Länge von γ zwischen den Punkten a und $a+t$, so ist diese Parametrisierung durch $\hat{\gamma}(s) = \gamma(\alpha^{-1}(s))$ gegeben.

Um die angegebene Formel verstehen zu können, ist es günstig, an passender Stelle eine Riemannsche Summe zu entdecken. Betrachten wir den Fall eines durch $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ parametrisierten Drahts D mit Massendichte $\rho : D = \gamma([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}$, so führt eine Approximation von D durch Segmente $\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})$ mit konstanter Massendichte $\rho(\gamma(\tau_i))$ — hier ist wie oft $t_0 = a < t_1 < \dots < t_N = b$ und $\tau_i \in [t_{i-1}, t_i]$, $i = 1, \dots, N$ — zu einer Approximation der Gesamtmasse von durch

$$\sum_{i=1}^N \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\| \rho(\gamma(\tau_i))$$

Wendet man hier mechanisch den Mittelwertsatz an und wählt die τ_i passend, so stößt man auf die Riemannsche Summe

$$\sum_{i=1}^N \|\gamma'(\tau_i)\| \rho(\gamma(\tau_i)) (t_i - t_{i-1}),$$

was zwar in die richtige Richtung zu weisen scheint, leider aber dennoch insgesamt Quatsch ist, da es diesen Mittelwertsatz für Kurven nicht gibt. Stattdessen muss man den Mittelwertsatz nur auf die Komponentenfunktionen γ_j einzeln anwenden und erhält einen Ausdruck der Form

$$\sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=1}^n \gamma_j'(\tau_{j,i})^2 \right)^{1/2} \rho(\gamma(\tau_i))(t_i - t_{i-1}), \quad \tau_{j,i} \in [t_{i-1}, t_i]$$

Wir benötigen an dieser Stelle die sogenannte *gleichmäßige Stetigkeit* der Funktionen $\gamma' : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, nämlich die Eigenschaft, dass

für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, so dass für alle $x_{1,2} \in [a, b]$ aus $|x_1 - x_2| < \delta$ folgt $\|\gamma'(x_1) - \gamma'(x_2)\| < \varepsilon$.

Man zeigt diese Verschärfung der Stetigkeitsbedingung (normalerweise hängt δ ja von den Punkten in $[a, b]$ ab) unter Ausnutzung der Kompaktheit des Intervalls $[a, b]$. Die gleichmäßige Stetigkeit gestattet es nun, den Wert von

$$\left| \sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=1}^n \gamma_j'(\tau_{j,i})^2 \right)^{1/2} \rho(\gamma(\tau_i))(t_i - t_{i-1}) - \sum_{i=1}^N \|\gamma'(\tau_i)\| \rho(\gamma(\tau_i))(t_i - t_{i-1}) \right|$$

beliebig klein werden zu lassen, wobei wir nur die Feinheit der Zerlegung $t_0 < \dots < t_N$ (also die Abstände $t_i - t_{i-1}$) passend wählen müssen. Die Zahlen $\sum_{i=1}^N \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\| \rho(\gamma(\tau_i))$ konvergieren daher für immer feinere Zerlegungen schließlich doch gegen das Integral $\int_a^b f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt$.

B. Beispiele Das Beispiel aus Teil A. (Berechnung der Gesamtmasse eines Drahts bei bekannter Massendichte) gibt es in vielen weiteren Varianten. Insbesondere ist die Länge der Kurve $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, die sogenannte Bogenlänge $L(\gamma)$, die zunächst angenähert gleich ist der Länge eines Polygonzugs, der durch eine Zerlegung des Intervalls $[a, b]$ gegeben ist, (physikalisch ja sehr glaubwürdig) durch die Massendichte $\rho = 1$ gegeben:

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt.$$

Wichtig ist die Beobachtung, dass diese Länge (wie auch alle weiteren hier diskutierten Integrale) nicht von der gewählten Parametrisierung abhängen, also Bogenlänge oder das Gewicht der Kurve nicht davon abhängig sind, mit welcher Geschwindigkeit man bei Integration die Kurve durchläuft.

Die Funktion ρ ist in häufig vektorwertig, etwa dann, wenn es darum geht, mechanische Kenngrößen eines (idealisiert) als Kurve gedachten dünnen Drahtes auszurechnen. So ergibt sich der Schwerpunkt einer Kurve