Analysis III

1.1 Treppenfunktionen. Die L^1-Halbnorm

"Mit Furcht und Schrecken wende ich mich ab von dieser beklagenswerten Übel der Funktionen ohne Ableitungen." Charles Hermite

1.1 Def.: a) Ein Quader $Q \subset \mathbb{R}^n$ ist eine Teilmenge der Form $I_1 \times \dots \times I_n$, wo $I_j \subset \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, n$ ein beschränktes, nichtleeres Intervall ist.
(Wir lassen offene, halboffene, abgeschlossene und Intervalle mit einem Punkt zu.)

b) Das Volumen eines Quaders Q wie in a) definieren wir als

$$v(Q) := |I_1| \cdot \dots \cdot |I_n|.$$

c) $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt Treppenfunktion, falls paarweise disjunkte Quader $Q_1, \dots, Q_s \subset \mathbb{R}^n$ existieren mit $\varphi|_{Q_k}$ konstant, $k = 1, \dots, s$ und

$$\varphi|_{\mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{k=1}^{s} Q_k} \equiv 0.$$

φ lässt sich dann schreiben als

$$\varphi = \sum_{k=1}^{s} c_k \cdot \chi_{Q_k},$$

wo $\chi_{Q_k} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ die charakteristische Funktion von Q_k ist:

$$\chi_{Q_k}(x) := \begin{cases} 1, & x \in Q_k \\ 0, & x \notin Q_k \end{cases}.$$

Wir schreiben $\mathcal{T}_{\mathbb{R}^n} := \{\text{Treppenfunktionen auf } \mathbb{R}^n\}$

d) Für einen Treppenfunktion φ wie in c) definieren wir das Integral

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\, dx := \sum_{k=1}^{s} c_k \cdot v(Q_k);$$

wir schreiben auch $\int \varphi\, dx$.

1.2 Bem.: Falls $Q_1, \dots, Q_s \subset \mathbb{R}^n$ Quader sind und $c_1, \dots, c_s \in \mathbb{R}$, so ist $\varphi = \sum c_k \cdot \chi_{Q_k}$ eine Treppenfunktion: Es existieren paarweise disjunkte Quader $Q'_1, \dots, Q'_{s'} \subset \mathbb{R}^n$ mit $\varphi|_{Q'_l} \equiv c'_l$ und $\bigcup_{k=1}^{s} Q_k = \bigcup_{l=1}^{s'} Q'_l$.
Es gilt dann $\varphi(.) = \sum_{l=1}^{s'} c'_l \cdot \chi_{Q'_l}$.

1.3 Prop.: a) $\mathcal{T}_{\mathbb{R}^n}$ ist VR über $\mathbb{R}$.

b) $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\,dx$ hängt nicht von der Darstellung $\varphi = \sum_{k=1}^{s} c_k \cdot \chi_{Q_k}$ ab (wo $Q_1, \dots, Q_s \subset \mathbb{R}^n$ Quader sind und $c_1, \dots, c_s \in \mathbb{R}$).

c) Es gilt

(i) $\int (\alpha\cdot\varphi + \beta\cdot\psi)\,dx = \alpha\cdot\int\varphi\,dx + \beta\cdot\int\psi\,dx$, $\varphi, \psi \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}^n}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,
d.h. $(\varphi \mapsto \int\varphi\,dx)$ ist lineares Funktional auf $\mathcal{T}_{\mathbb{R}^n}$.

(ii) $\left|\int\varphi\,dx\right| \le \int|\varphi|\,dx$, $\varphi \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}^n}$

(iii) $\varphi \le \psi \Rightarrow \int\varphi\,dx \le \int\psi\,dx$.

Bew. 1 a) 1. $Q, Q' \subset \mathbb{R}^n$ Quader $\Rightarrow$ $Q \cap Q' \subset \mathbb{R}^n$ Quader

2. $\varphi = \sum_{k=1}^{s} c_k \cdot \chi_{Q_k}$, $\psi = \sum_{l=1}^{s'} c'_l \cdot \chi_{Q'_l} \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}^n}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

dann gilt (o.E. $\bigcup_k Q_k = \bigcup_l Q'_l$)

$$\alpha \cdot \varphi + \beta \cdot \psi = \sum_{\substack{k=1,\dots,s \\ l=1,\dots,s'}} (\alpha \cdot c_k + \beta \cdot c'_l) \cdot \chi_{Q_k \cap Q'_l} \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}^n}.$$

b) Für $n = 1$: Analysis I.

Sei die Behauptung für $n-1$ bewiesen.

Betrachte

(*) $\varphi = \sum_{k=1}^{s} c_k \cdot \chi_{Q_k} \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}^n}$.

Jeder Quader Q_k lässt sich schreiben als

$Q_k = Q'_k \times Q''_k$ mit Quadern $Q'_k \subset \mathbb{R}$, $Q''_k \subset \mathbb{R}^{n-1}$;

es gilt für $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1} = \mathbb{R}^n$

$$\chi_{Q_k}(x, y) = \chi_{Q'_k}(x) \cdot \chi_{Q''_k}(y).$$

Für $y \in \mathbb{R}^{n-1}$ definiere $\varphi_y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $\varphi_y(x) := \varphi(x, y)$.

Dann gilt

$$\varphi_y(x) = \sum_{k=1}^{s} c_k \cdot \chi_{Q''_k}(y) \cdot \chi_{Q'_k}(x)$$

und $\varphi_y \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}}$ nach Bem. 1.2.

Aus I $\Rightarrow \int \varphi_y(x)\,dx$ ist wohldefiniert und hängt nicht von der Darstellung (**) ab; es gilt

$$(***) \quad \Phi(y) := \int_{\mathbb{R}} \varphi_y(x)\,dx = \sum_{k=1}^{s} c_k \cdot \chi_{Q_k''}(y) \cdot v_{\mathbb{R}}(Q_k').$$

Dann ist $\Phi : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ definiert durch $y \mapsto \Phi(y)$ in $\mathcal{T}_{\mathbb{R}^{n-1}}$ wegen der Darstellung (***) und Bem. 1.2.

Nach IV ist $\int \Phi(y)\,dy$ wohldefiniert und hängt nicht von der Darstellung (***) ab, es gilt

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \Phi(y)\,dy = \sum_{k=1}^{s} c_k \cdot v_{\mathbb{R}}(Q_k') \cdot v_{\mathbb{R}^{n-1}}(Q_k''),$$

also

$$(****) \quad \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_{\mathbb{R}} \varphi_y(x)\,dx \right) dy = \sum_{k=1}^{s} c_k \cdot v_{\mathbb{R}^n}(Q_k),$$

und die linke Seite hängt nicht von der Darstellung (*) ab.

c) Übung, benutze (****). $\square$

1.4 <u>Cor.</u> (Fubini für Treppenfunktionen): Für $\varphi \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}^n}$ gilt mit $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p}$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(z)\,dz = \int_{\mathbb{R}^{n-p}} \left(\int_{\mathbb{R}^p} \varphi(x,y)\,dx \right) dy.$$

Bew.: Benutze wiederholt (****). $\square$

1.5 Notation: Wir versehen $(-\infty, \infty] = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ mit Ordnung und Operationen von $\mathbb{R}$ und

* $c < \infty$, $c \in \mathbb{R}$
* $\infty + c = c + \infty = \infty$, $c \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$
* $\infty \cdot c = c \cdot \infty = \infty$, $c \in \mathbb{R}_+^*$
* $\infty \cdot 0 = 0 \cdot \infty = 0$.

1.6 Def.: Sei $f : \mathbb{R}^n \to (-\infty, \infty]$ eine Abbildung.
Eine Treppe über f ist eine Reihe

$$\Phi = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \cdot \chi_{Q_k}$$

mit folgenden Eigenschaften:

(i) $Q_k \subset \mathbb{R}^n$ sind offene Quader, $c_k \in \mathbb{R}_+$

(ii) $|f(x)| \leq \Phi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \cdot \chi_{Q_k}(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$.

Wir setzen $I(\Phi) := \sum_{k=0}^{\infty} c_k \cdot v(Q_k)$.

1.7 Def.: Sei $f : \mathbb{R}^n \to (-\infty, \infty]$ eine Abbildung. Wir setzen

$$\|f\|_1 := \inf \{ I(\Phi) \mid \Phi \text{ ist Treppe über } f \}.$$

1.8 Bem.: 1. Eine Treppe über f existiert für jedes f (warum?), daher ist $\|f\|_1 \in [0, \infty]$ für jedes f.

2. Für $f, g : \mathbb{R}^n \to (-\infty, \infty]$, $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

(i) $\|\lambda \cdot f\|_1 = |\lambda| \cdot \|f\|_1$

(ii) $\|f + g\|_1 \leq \|f\|_1 + \|g\|_1$

(iii) $|f| \leq |g| \Rightarrow \|f\|_1 \leq \|g\|_1$.

Bew.: Übung.

3. Es gilt nicht $\|f\|_1 = 0 \Rightarrow f = 0$ (Übung),
$\|\cdot\|_1$ ist also Halbnorm auf $\{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \mid \|f\|_1 < \infty\}$ (~ VR ~~wegen~~ w/2.)

1.5 Prop. 1 Für $f_0, f_1, \ldots : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ definiert

$$x \mapsto \sum_{k \in \mathbb{N}} f_k(x) = \lim_{K \to \infty} \sum_{k=0}^{K} f_k(x), \quad x \in \mathbb{R}^n$$

eine Abbildung $\sum_{k \in \mathbb{N}} f_k : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$.
Es gilt $\|\sum_{k \in \mathbb{N}} f_k\|_1 \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} \|f_k\|_1$.

Bew.: Sei $\varepsilon > 0$. Für jedes $k \in \mathbb{N}$ wähle eine Treppe

$$\Phi_k = \sum_{i \in \mathbb{N}} c_{k,i} \cdot \chi_{Q_{k,i}}$$

über f_k mit $I(\Phi_k) \leq \|f_k\|_1 + \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}$.
Wähle eine Bijektion $\gamma : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ und setze

$$\Phi := \sum_{l \in \mathbb{N}} c_{\gamma(l)} \cdot \chi_{Q_{\gamma(l)}}.$$

Dann gilt:

* $\Phi = \sum_{k \in \mathbb{N}} \Phi_k$, insbesondere ist Φ nicht abhängig von γ
* Φ ist Treppen über $\sum_{k \in \mathbb{N}} f_k$
* $$\Big\| \sum_{k \in \mathbb{N}} f_k \Big\|_1 \le I(\Phi) = \sum_{l \in \mathbb{N}} c_{\gamma(l)} \cdot v(Q_{\gamma(l)}) \overset{(*)}{=} \sum_{k \in \mathbb{N}} I(\Phi_k) \le \sum_{k \in \mathbb{N}} \left(\|f_k\|_1 + \frac{\varepsilon}{2^{k+1}} \right) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \|f_k\|_1 + \varepsilon.$$

Für $(*)$ beachte:

$(a_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset [0, \infty]$, $\beta : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ Bijektion, dann gilt

$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \sum_{k=0}^{\infty} a_{\beta(k)}$; wir schreiben daher auch

$\sum_{k \in \mathbb{N}} a_k := \sum_{k=0}^{\infty} a_k$. $\square$

1.10 Lemma: Sei $Q \subset \mathbb{R}^n$ ein abgeschlossener Quader. Dann gilt $\|\chi_Q\|_1 = v(Q) \overset{\text{Def}}{=} \int \chi_Q \, dx$.

Bew.: Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein offener Quader $Q' \subset \mathbb{R}^n$ mit $Q \subset Q'$ und $v(Q') \leq v(Q) + \varepsilon$.

$\chi_{Q'}$ ist eine Treppe über χ_Q; es gilt $I(\chi_{Q'}) = v(Q')$.

Es folgt $\|\chi_Q\|_1 \leq I(\chi_{Q'}) = v(Q') \leq v(Q) + \varepsilon$, also

$$\|\chi_Q\|_1 \leq v(Q).$$

Sei nun $\Phi = \sum c_k \cdot \chi_{Q_k}$ eine Treppe über χ_Q.

Zu $\varepsilon > 0$ und $x \in Q$ existiert wegen $\chi_Q(x) \leq \Phi(x)$ ein $N(x) \in \mathbb{N}$ mit

$$1 - \varepsilon = \chi_Q(x) - \varepsilon < \sum_{k=0}^{N(x)} c_k \cdot \chi_{Q_k}(x).$$

Die Q_k sind offen, daher existiert eine offene Umgebung $U(x)$ von x so dass gilt: $x \in Q_k \Rightarrow U(x) \subset Q_k$, $k = 0, \dots, N(x)$

Für $y \in U(x)$ erhalten wir

$$1 - \varepsilon < \sum_{k=0}^{N(x)} c_k \cdot \chi_{Q_k}(x) \leq \sum_{k=0}^{N(x)} c_k \cdot \chi_{Q_k}(y).$$

$(U(x))_{x \in Q}$ ist offene Überdeckung von Q; Q kompakt

$\overset{\text{Heine-Borel}}{\Rightarrow} \exists\, x_1, \dots, x_L \in Q$ mit $Q \subset \bigcup_{i=1}^{L} U(x_i)$.

Setz. $N := \max\{N(x_i) \mid i = 1, \ldots, L\}$, dann gilt für $y \in Q$.

$$\sum_{k=0}^{N} c_k \cdot \chi_{Q_k}(y) \geq 1 - \varepsilon = (1-\varepsilon) \cdot \chi_Q(y),$$

also

$$\underset{\substack{\cap \\ \mathcal{J}_{\mathbb{R}^n}}}{\sum_{k=0}^{N} c_k \cdot \chi_{Q_k}} \geq \underset{\substack{\cap \\ \mathcal{J}_{\mathbb{R}^n}}}{(1-\varepsilon) \cdot \chi_Q}.$$

$$\overset{\text{Prop.1.1.3(iii)}}{\Rightarrow} \quad I(\Phi) \geq \sum_{k=0}^{N} c_k \cdot v(Q_k)$$

$$= \int \Big(\sum_{k=0}^{N} c_k \cdot \chi_{Q_k}(y)\Big) dy$$

$$\overset{3.3(iii)}{\geq} \int (1-\varepsilon) \cdot \chi_Q(y)\, dy$$

$$= (1-\varepsilon) \cdot v(Q).$$

$$\Rightarrow \quad I(\Phi) \geq v(Q)$$

$$\Rightarrow \quad \|\chi_Q\|_1 \geq v(Q). \qquad \square$$

1.11 Lemma: Für jedes $\varphi \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}^n}$ gilt $\|\varphi\|_1 = \int |\varphi|\, dx$.

Bew.: 1. Es existieren paarweise disjunkte Quader $Q_1, \dots, Q_s, P_1, \dots, P_r \subset \mathbb{R}^n$ und $c_1, \dots, c_s, d_1, \dots, d_r \in \mathbb{R}$ mit

* $\varphi = \sum_{k=1}^{s} c_k \cdot \chi_{Q_k} + \sum_{l=1}^{r} d_l \cdot \chi_{P_l}$
* $Q_k \subset \mathbb{R}^n$ ist offen, $k = 1, \dots, s$
* $v(P_l) = 0$, $l = 1, \dots, r$ (d.h. P_l ist von der Form $I_{l,1} \times \dots \times I_{l,n}$, und mindestens ein $I_{l,j}$ besteht nur aus einem Punkt).

(Übung)

Es gilt dann

$$|\varphi| = \sum_k |c_k| \cdot \chi_{Q_k} + \sum_l |d_l| \cdot \chi_{P_l}$$

(die Quader sind paarweise disjunkt).

Sei nun $\varepsilon > 0$. Zu jedem P_l wähle offenen Quader P_l' mit $P_l \subset P_l'$ und $v(P_l') < \varepsilon$, dann ist

$$\Phi := \sum_{k=1}^{s} |c_k| \cdot \chi_{Q_k} + \sum_{l=1}^{r} |d_l| \cdot \chi_{P_l'}$$

eine Treppe über φ mit

$$I(\Phi) = \sum_{k=1}^{s} |c_k| \cdot v(Q_k) + \sum_{l=1}^{r} |d_l| \cdot v(P_l') \le \sum_k |c_k| \cdot v(Q_k) + \varepsilon \cdot \sum_l |d_l|,$$

also $\|\varphi\|_1 \le \sum_{k=1}^{s} |c_k| \cdot v(Q_k) = \int |\varphi|\, dx$.

2. Sei nun Q ein allg. Quader mit

$$\left(\left(\bigcup_k Q_k\right) \cup \left(\bigcup_l P_l\right)\right) \subset Q,$$

d.h. $\varphi\big|_{\mathbb{R}^n \setminus Q} \equiv 0.$

Setze $M := \max\{|c_k|, |d_l|\} = \max|\varphi|$;

setze $\psi := M \cdot \chi_Q - |\varphi|$, dann ist

$0 \le \psi = |\psi| \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}^n}$ und nach Teil 1 gilt

(*) $\|\psi\|_1 \le \int |\psi| \, dx = \int \psi \, dx.$

Wir erhalten

$$\begin{aligned}
\int |\varphi| \, dx &= \int (M \cdot \chi_Q - \psi) \, dx \\
&= M \cdot \int \chi_Q \, dx - \int \psi \, dx \\
&\overset{1.B.10}{=} M \cdot \|\chi_Q\|_1 - \int \psi \, dx \\
&= \|M \cdot \chi_Q\|_1 - \int \psi \, dx \\
&= \| |\varphi| + \psi \|_1 - \int \psi \, dx \\
&\overset{(*)}{\le} \| |\varphi| + \psi \|_1 - \|\psi\|_1 \\
&\overset{\Delta\text{-Ungl.}}{\le} \| |\varphi| \|_1 + \|\psi\|_1 - \|\psi\|_1 \\
&= \|\varphi\|_1 .
\end{aligned}$$

□