3. Meßbarkeit in $\mathbb{R}^n$. Nullmengen

"I probably most wanted to learn how to ask good questions."
Dusa McDuff

3.1 Def.: Eine Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ heißt (Lebesgue) meßbar, falls χ_A integrierbar ist. Wir setzen dann

$$v(A) := \int \chi_A \, dx.$$

3.2 Prop.: $A, B \subset \mathbb{R}^n$ meßbar, dann sind $A \cup B$ und $A \cap B$ meßbar mit $v(A \cup B) = v(A) + v(B) - v(A \cap B)$.
Falls $A \subset B$, so gilt $v(A) \leq v(B)$.

Bew.: Benutze Prop. 2.3 und:

(i) $\chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_{A \cap B}$

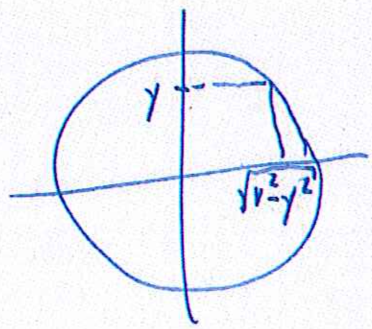
(ii) $A \subset B \Rightarrow \chi_A \leq \chi_B$. $\square$

3.3 Prop.: Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und offen oder kompakt. Dann ist A meßbar.

Bew.: 1. Sei zunächst $A \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und offen. Dann ist $f \equiv 1$ stetig und beschränkt auf A, also integrierbar über A nach Satz 2.10.
$\Rightarrow \chi_A = f_A$ ist integrierbar.

2. Falls A kompakt ist, so existiert ein offener Quader $Q \subset \mathbb{R}^n$ mit $A \subset Q$. Dann ist $Q \setminus A$ beschränkt und offen, also ist χ_Q, $\chi_{Q\setminus A}$ integrierbar nach 1. Nach 2.3 ist dann auch $\chi_A = \chi_Q - \chi_{Q \setminus A}$ integrierbar. $\square$

3.4 + 13.1 (i) $\quad U_r = B_{\mathbb{R}^2}(0,r) \underset{\text{offen}}{\subseteq} \mathbb{R}^2$



$$v(U_r) = \int_{\mathbb{R}^2} \chi_{U_r}(x,y)\, d(x,y)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \chi_{U_r}(x,y)\, dx \right) dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \chi_{(-r,r)}(y) \cdot \chi_{(-\sqrt{r^2-y^2},\, \sqrt{r^2-y^2})}(x)\, dx \right) dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \chi_{(-r,r)}(y) \left(\int_{-\sqrt{r^2-y^2}}^{\sqrt{r^2-y^2}} 1\, dx \right) dy$$

$$= \int_{-r}^{r} 2\sqrt{r^2-y^2}\, dy$$

$$= 2 \int_{-r}^{r} r \cdot \sqrt{1-\left(\frac{y}{r}\right)^2}\, dy$$

$s = \frac{y}{r}$, $\frac{ds}{dy} = \frac{1}{r}$, $\frac{dy}{ds} = r$

$$= 2 \int_{s(-r)}^{s(r)} r \cdot r \sqrt{1-s^2}\, ds$$

$$= r^2 \cdot 2 \int_{-1}^{1} \sqrt{1-s^2}\, ds$$

Ana I, 13.20

$$= r^2 \cdot \pi .$$

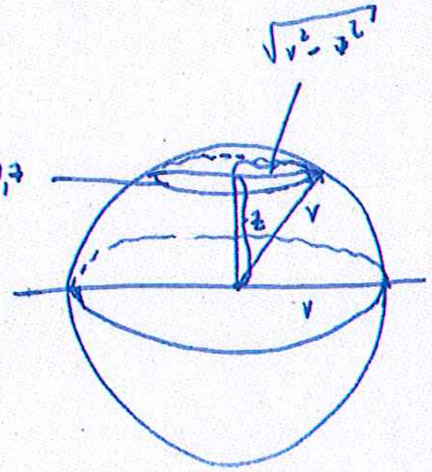
(ii) $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ kpt., also meßbar nach 3.3

$$S^1 \subset \underbrace{U_{1+\varepsilon} \setminus U_1}_{\text{vgl. (i)}}$$

$$3.2 \Rightarrow v(U_{1+\varepsilon}) = v(U_1 \cup (U_{1+\varepsilon} \setminus U_1))$$
$$= v(U_1) + v(U_{1+\varepsilon} \setminus U_1) - \underbrace{v(\emptyset)}_{=0}$$

$$\Rightarrow v(S^1) \leq v(U_{1+\varepsilon} \setminus U_1) = v(U_{1+\varepsilon}) - v(U_1) = \pi\left((r+\varepsilon)^2 - r^2\right) \xrightarrow{\varepsilon \to 0} 0.$$

$$\Rightarrow v_{\mathbb{R}^2}(S^1) = 0.$$



(iii) $K_r = B_{\mathbb{R}^3}(0,r) \underset{\text{offen}}{\subseteq} \mathbb{R}^3$.

$$v(K_r) = \int_{\mathbb{R}^3} \chi_{K_r}(x,y,z)\, d(x,y,z)$$
$$= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}^2} \chi_{K_r}(x,y,z)\, d(x,y) \right) dz$$
$$= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}^2} \chi_{(-r,r)}(z) \cdot \chi_{U_{r,z}}(x,y)\, d(x,y) \right) dz$$
$$= \int_{\mathbb{R}} \chi_{(-r,r)}(z) \left(\int_{\mathbb{R}^2} \chi_{U_{r,z}}(x,y)\, d(x,y) \right) dz$$
$$= \int_{\mathbb{R}} \chi_{(-r,r)}(z)\, \pi\, (r^2 - z^2)\, dz$$
$$= \pi \left(r^2 \int_{-r}^{r} 1\, dz - \int_{-r}^{r} z^2\, dz \right)$$
$$= \pi \left(r^2 \cdot 2r - \frac{2}{3} r^3 \right)$$
$$= \pi \frac{4}{3} r^3.$$

3.5 Bem.: Seien $U, W \subset \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$ offen.

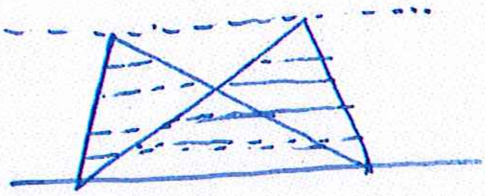
Setze $U_y := \{x \in \mathbb{R}^{n-1} \mid (x,y) \in U\}$, $W_y := \{x \in \mathbb{R}^{n-1} \mid (x,y) \in W\}$, $y \in \mathbb{R}$.

Dann gilt $v_{\mathbb{R}^n}(U) = v_{\mathbb{R}^n}(W)$, falls

$v_{\mathbb{R}^{n-1}}(U_y) = v_{\mathbb{R}^{n-1}}(W_y)$ für $y \in \mathbb{R}$, denn

$$v_{\mathbb{R}^n}(U) = \int_{\mathbb{R}} v_{\mathbb{R}^{n-1}}(U_y)\,dy = \int_{\mathbb{R}} v_{\mathbb{R}^{n-1}}(W_y)\,dy = v(W).$$

Mit Translationsinvarianz ergibt sich das „Prinzip von Cavalieri".



3.6 Prop./Def.: $N \subset \mathbb{R}^n$ heißt (Lebesgue) Nullmenge, falls sie eine der folgenden äquivalenten Eigenschaften erfüllt:

(i) N ist meßbar und $v(N) = 0$

(ii) $\|\chi_N\|_1 = 0$.

Sei $E : \mathbb{R}^n \to \{\text{wahr}, \text{falsch}\}$ eine Eigenschaft, so sagen wir E gilt fast überall, falls $N_E = \{x \in \mathbb{R}^n \mid E(x) = \text{falsch}\}$ eine Nullmenge ist.

Bew.: (i) $\Rightarrow$ (ii): $0 \le \|\chi_N\|_1 \overset{2.[redacted].3 b)}{=} \int \chi_N \, dx =: v(N) \overset{n.V.}{=} 0$.

integrierbar nach Voraussetzung

(ii) $\Rightarrow$ (i): Setze $\varphi_k :\equiv 0 \in \tilde{J}_{\mathbb{R}^n}$, $k \in \mathbb{N}$, dann gilt

$\|\chi_N - \varphi_k\|_1 = \|\chi_N\|_1 \overset{n.V.}{=} 0$, also ist χ_N integrierbar.

Prop. 2.[redacted].3 b) $\Rightarrow$ $0 \le \underbrace{\int \chi_N \, dx}_{= v(N)} \le \|\chi_N\|_1 = 0$. □

3.[redacted].7 Prop.: (i) Jede Teilmenge einer Nullmenge ist eine Nullmenge.

(ii) Jede abzählbare Vereinigung von Nullmengen ist eine Nullmenge.

Bew.: (i) $M \subset N \Rightarrow 0 \le \chi_M \le \chi_N \overset{\text{Bem. } 1.8}{\Longrightarrow} 0 \le \|\chi_M\|_1 \le \|\chi_N\|_1$.

(ii) $N = \bigcup_{k=0}^{\infty} N_k \Rightarrow \chi_N \le \sum_{k=0}^{\infty} \chi_{N_k} \overset{\text{Bem. } 1.8, \text{ Prop. } 1.9}{\Longrightarrow} 0 \le \|\chi_N\|_1 \le \left\|\sum_{k=0}^{\infty} \chi_{N_k}\right\|_1 \le \sum_{k=0}^{\infty} \|\chi_{N_k}\|_1$

□

3.8 Prop.: Sei $f: \mathbb{R}^n \to (-\infty, \infty]$ eine Abbildung mit $\|f\|_1 < \infty$.

Dann ist f fast überall endlich, d.h.

$N := \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = \infty\}$

ist eine Nullmenge.

Bew.: Für $\varepsilon > 0$ ist $0 \le \chi_N \le \varepsilon \cdot |f|$, also

$0 \le \|\chi_N\|_1 \overset{\text{Bem. } 1.8}{\le} \|\varepsilon \cdot |f|\|_1 \overset{1.8}{=} \varepsilon \cdot \|f\|_1 \xrightarrow{\varepsilon \to 0} 0$. $\Rightarrow \|\chi_N\|_1 = 0$. □

3.9 Prop.: Seien $f, g : \mathbb{R}^n \to [-\infty, \infty]$ mit $f = g$ fast überall. Falls f integrierbar ist, so auch g und es gilt
$$\int f \, dx = \int g \, dx.$$

Bew.: Sei $N := \{ x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \neq g(x) \}$, dann gilt
$$\int \chi_N \, dx = 0 \text{ nach Voraussetzung.}$$

Definiere $h : \mathbb{R}^n \to [-\infty, \infty]$ durch
$$h(x) := \infty \cdot \chi_N(x) = \begin{cases} \infty, & x \in N \\ 0, & x \notin N \end{cases}, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

dann gilt
$$h = \sum_{k=0}^{\infty} \chi_N$$

und
$$\|h\|_1 \overset{\text{Prop. 1.9}}{\leq} \sum_{k=0}^{\infty} \|\chi_N\|_1 = 0.$$

f integrierbar $\Rightarrow \exists (\varphi_k)_{\mathbb{N}} \subset \tilde{\mathcal{J}}_{\mathbb{R}^n}$ mit $\|f - \varphi_k\|_1 \xrightarrow{k \to \infty} 0$.

Es gilt $|g - \varphi_k| \leq |f - \varphi_k| + h$, also
$$\|g - \varphi_k\|_1 \leq \|f - \varphi_k\|_1 + \|h\|_1 = \|f - \varphi_k\|_1 \xrightarrow{k \to \infty} 0.$$

$\overset{\text{Z.1}}{\Rightarrow}$ g ist integrierbar und $\int g \, dx = \lim_{k \to \infty} \int \varphi_k \, dx = \int f \, dx$. $\square$

3.10 z.B.: (i) $\mathbb{Q}$ ist Nullmenge in $\mathbb{R}$:

$v(\{x\}) = 0, \quad x \in \mathbb{R}$;

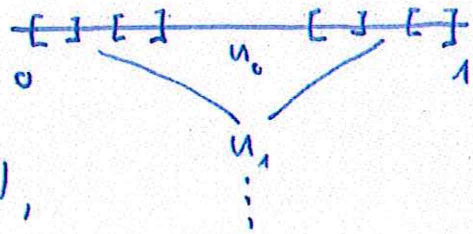
$\mathbb{Q}$ ist abzählbare Vereinigung von Einpunktmengen

$\overset{3.7(ii)}{\Rightarrow}$ $\mathbb{Q}$ ist Nullmenge.

Alternativ: Benutze Satz 2.8 (Beppo Levi).

(ii) Sei $C \subset [0,1]$ die Cantormenge, dann ist C eine Nullmenge:

$[0,1] \setminus C = \dot{\bigcup}_{l=0}^{\infty} U_l$



Setze $\varphi_k := \chi_{\dot{\bigcup}_{l=0}^{k} U_l}$, $k \in \mathbb{N}$,

dann ist $(\varphi_k)_{\mathbb{N}} \subset \tilde{J}_{\mathbb{R}}$,

$\varphi_k \xrightarrow{k\to\infty} \chi_{[0,1]\setminus C}$ punktweise und monoton,

und $\int \varphi_k \, dx \leq 1$, $k \in \mathbb{N}$.

$$\overset{2.8}{\Rightarrow} \int \chi_{[0,1]\setminus C} \, dx = \lim_{k\to\infty} \int \varphi_k \, dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{3^{k+1}} = \frac{1}{3} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k = 1.$$

$$\Rightarrow \int \chi_C \, dx = \int \chi_{[0,1]} \, dx - \int \chi_{[0,1]\setminus C} \, dx = 1 - 1 = 0.$$

Die Cantormenge ist eine überabzählbare Nullmenge.

3.11 <u>Bem.</u>: Nullmengen lassen sich auch wie folgt charakterisieren:

$N \subset \mathbb{R}^n$ ist Nullmenge genau dann wenn folgendes gilt:

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists Q_0, Q_1, \ldots \underset{\text{off}}{\subseteq} \mathbb{R}^n$ offene Quader mit

$N \subset \bigcup_{k\in\mathbb{N}} Q_k$ und $\sum_{k\in\mathbb{N}} v(Q_k) < \varepsilon$.

o. Bew.

3.12 <u>Regel</u>: Sei $Q \subset \mathbb{R}^n$ ein Quader und $A_0, A_1, \ldots \subset Q$ eine Folge meßbarer Mengen. Dann ist $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k$ meßbar.

Bew.: I.W. wie 2.8. (Werden später eine allgemeinere Version von Beppo Levi zeigen). □

3.13 <u>Bem.</u>: Wir haben damit:

beschränkte offene Mengen sind meßbar

kompakte ——— " ———

beschränkte abz. Vereinigungen meßbarer — " ———

Komplemente meßbarer Mengen in beschränkten meßbaren ——— " ———

Frage: Existieren überhaupt (beschränkte) nicht meßbare Mengen?

3.14 <u>Satz</u>: $\mathbb{R}$ besitzt* eine Teilmenge, die nicht meßbar ist.

* in ZFC

Bew.: Für $x \in [0,1]$ definiere $E_x := \{y \in [0,1] \mid x - y \in \mathbb{Q}\} \subset [0,1]$.

Dann gilt für $x, x' \in [0,1]$: $E_x = E_{x'}$ oder $E_x \cap E_{x'} = \emptyset$.

$(\exists y \in E_x \cap E_{x'} \Leftrightarrow \exists y : x - y \in \mathbb{Q}$ und $x' - y \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow x - x' \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow E_x = E_{x'})$

Es gilt $[0,1] = \bigcup_{x \in [0,1]} E_x$.

Setze $A := \{E \mid E = E_x$ für ein $x \in [0,1]\} \subset \mathcal{P}([0,1])$.

Sei $f : A \to [0,1]$ eine Funktion mit $f(E) \in E$, $E \in A$;

$\quad \overset{\shortparallel}{\bigcup_{E \in A} E}$ $\qquad$ f existiert nach Auswahlaxiom.

Setze $M := f(A) \subset [0,1]$.

Setze $J := \mathbb{Q} \cap [-1,1]$, dann ist J abzählbar, d.h.

es existiert $(j_i)_{i \in \mathbb{N}}$ mit $J = \{j_1, j_2, \dots\}$ und $j_i \neq j_{i'}$ falls $i \neq i'$.

Setze $M_i := M + j_i = \{y + j_i \mid y \in M\} \subset [-1, 2]$.

Beh.: (i) $[0,1] \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} M_i = \{y + j_i \mid y \in M, i \in \mathbb{N}\}$

(ii) $M_i \cap M_{i'} = \emptyset$ falls $i \neq i'$.

Bew.: (i) $x \in [0,1]$, dann ist $f(E_x) \in E_x$, d.h.
$x - f(E_x) \in \mathbb{Q} \cap [-1,1] = J$, also $x = f(E_x) + j_i \in M_i$ für ein i.

(ii) Falls $z \in M_i \cap M_{i'}$, so gilt $z = y + j_i$ und $z = y' + j_{i'}$ für $y \neq y' \in M$ $(j_i \neq j_{i'})$.
Es gilt ~~dann~~ $y = f(E_x) \in E_x$, $y' = f(E_{x'}) \in E_{x'}$ für $x, x' \in [0,1]$,
also $y - y' \in \mathbb{Q}$ und $E_x \cap E_{x'} \neq \emptyset$, also $E_x = E_{x'}$, Widerspruch zu $y \neq y'$.

Wir haben nun $[0,1] \subset \bigcup_{i\in\mathbb{N}} M_i \subset [-1,2]$.

Angenommen, M sei meßbar.

Dann ist wegen Translationsinvarianz auch M_i meßbar und es gilt $v(M_i) = v(M)$.

Weiter gilt $v(M_i) = \int \chi_{M_i}\,dx = \|\chi_{M_i}\|_1$.

Wegen $[0,1] \subset \bigcup_{i\in\mathbb{N}} M_i$ haben wir außerdem

$$\chi_{[0,1]} \leq \sum_{i\in\mathbb{N}} \chi_{M_i},$$

also

$$1 = v([0,1]) = \int \chi_{[0,1]}\,dx \overset{20.3}{=} \|\chi_{[0,1]}\|_1 \overset{10.9}{\leq} \sum_{i\in\mathbb{N}} \|\chi_{M_i}\|_1$$

$$\overset{20.3}{=} \sum_{i\in\mathbb{N}} \int \chi_{M_i}\,dx = \sum_{i\in\mathbb{N}} v(M_i) = \sum_{i\in\mathbb{N}} v(M)$$

$$\Rightarrow v(M) > 0.$$

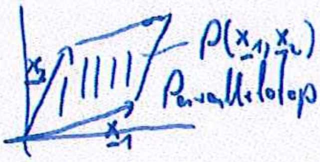
Wähle K so groß, dass $(K+1)\cdot v(M) > 3$ ist, dann gilt

$$3 < (K+1)\cdot v(M) = \sum_{i=0}^{K} v(M_i) = v\Big(\dot{\bigcup_{i=0}^{K}} M_i\Big) \leq \cancel{v\Big(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} M_i\Big) \leq} v([-1,2]) = 3 \quad ↯$$

$\Rightarrow M$ ist nicht meßbar. $\square$

38.15 **Satz:** Seien $\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_n \in \mathbb{R}^n$ und setze

$$P(\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_n) := \left\{ \underline{x} \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \exists\, t_1, \dots, t_n \in [0,1] : \underline{x} = \sum_{i=1}^n t_i \cdot \underline{x}_i \right\}.$$



Dann gilt

$$v(P(\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_n)) = |\det(\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_n)| = \left| \det \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix} \right|$$

$$\text{mit } \underline{x}_j = \begin{pmatrix} x_{1j} \\ \vdots \\ x_{nj} \end{pmatrix}.$$

Beweis: Sei $D : \underbrace{\mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n}_{n\text{-mal}} \to \mathbb{R}$ eine Abbildung mit

(D1) $D(\underline{a}_1, \dots, \lambda \cdot \underline{a}_i, \dots, \underline{a}_n) = |\lambda| D(\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n)$, $i \in \{1, \dots, n\}$, $\lambda \in \mathbb{R}$

(D2) $D(\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_i + \underline{a}_j, \dots, \underline{a}_j, \dots, \underline{a}_n) = D(\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n)$ für $i \neq j$

(D3) $D(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n) = 1$ $\left(\underline{e}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i \right)$.

Für $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n \in \mathbb{R}^n$ ist dann $D(\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n)$ durch ~~(D1), (D2)~~ (D1), (D2), (D3) mittels elementarer Umformungen festgelegt (vgl. Charakterisierung der Determinante in Lin. Algebra).

$\Rightarrow$ Es gibt höchstens eine Abbildung mit (D1), (D2), (D3).

Andererseits erfüllt $(\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n) \mapsto |\det(\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n)|$ (D1), (D2), (D3), also gilt

$$D(\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n) = |\det(\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n)|.$$

Es genügt daher zu zeigen, dass die Abbildung

$$(\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n) \mapsto v(P(\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n))$$

(D1), (D2), (D3) erfüllt.

(D3): $v(P(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)) = 1^n = 1$.

Falls $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n$ linear abhängig sind, so gilt

$v(P(\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n)) = 0 = |\det(\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n)|$

und (D1), (D2) sind erfüllt.

Seien also $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n$ linear unabhängig.

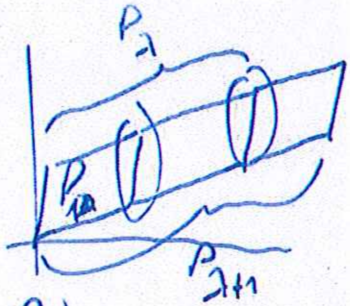
(D1): Für $i \in \{1, \dots, n\}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ setze

$$P_\lambda := P(\underline{a}_1, \dots, \lambda \cdot \underline{a}_i, \dots, \underline{a}_n);$$

wir müssen

(*) $v(P_\lambda) = |\lambda| \cdot v(P_1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$,

zeigen.



a) Zunächst für $\lambda \in \mathbb{N}^*$:

$\lambda = 1$ ✓

$\lambda \to \lambda + 1$: Es gilt $P_{\lambda+1} = P_\lambda \cup (\lambda \cdot \underline{a}_i + P_1)$

Weiter gilt $v(P_\lambda \cap (\lambda \cdot \underline{a}_i + P_1)) = 0$ (Übung),

also $v(P_{\lambda+1}) = v(P_\lambda) + v(P_1) \overset{IV}{=} (\lambda+1) \cdot v(P_1)$.

Induktion ⇒ (*) für $\lambda \in \mathbb{N}^*$.

Ebenso zeigt man $v(P_{q \cdot \lambda}) = q \cdot v(P_\lambda)$, $q \in \mathbb{N}^*$.

b) Jetzt für $\lambda = \frac{p}{q}$ mit $p, q \in \mathbb{N}^*$:

Nach a) gilt $v(P_{q\lambda}) = v(P_p) = p \cdot v(P_1)$

und $v(P_{q\lambda}) = q \cdot v(P_\lambda)$, also

$$v(P_\lambda) = \frac{p}{q} \cdot v(P_1) = \lambda \cdot v(P_1).$$

c) $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$: zu $\varepsilon > 0$ wähle $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}_+$ mit

$$r_1 \le \lambda \le r_2, \quad r_2 - r_1 < \frac{\varepsilon}{v(P_1)}$$

(P_1 enthält einen offenen Quader, daher ist $v(P_1) > 0$).

Dann gilt $P_{r_1} \subset P_\lambda \subset P_{r_2}$ und

$$\underset{\overset{\|\,b)}{r_1 \cdot v(P_1)}}{v(P_{r_1})} \le \underset{\lambda \cdot v(P_1)}{v(P_\lambda)} \le \underset{\overset{b)\,\|}{r_2 \cdot v(P_1)}}{v(P_{r_2})},$$

also

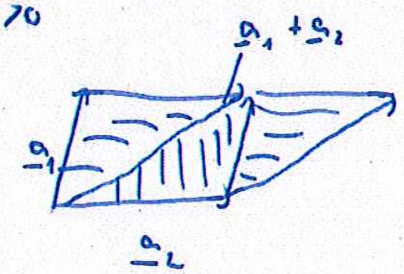
$$|v(P_\lambda) - \lambda \cdot v(P_1)| \le r_2 \cdot v(P_1) - r_1 \cdot V(P_1) = (r_2 - r_1) \cdot v(P_1) < \varepsilon.$$

d) $\lambda = 0$: P_0 liegt in einer Hyperebene $\overset{\text{Üb.}}{\Rightarrow}$ $v(P_0) = 0$.

e) $\lambda < 0$: $P_\lambda = \lambda \cdot \underline{a}_i + P_{-\lambda}$ und wegen Translationsinvarianz:

$$v(P_\lambda) = v(P_{\underbrace{-\lambda}_{>0}}) = -\lambda \cdot v(P_1) = |\lambda| \cdot v(P_1).$$

(D2): (nur Idee)



□

3.16 Cor.: Sei $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ linear und $Q \subset \mathbb{R}^n$ ein Quader.
Dann gilt $v(T(Q)) = |\det T| \cdot v(Q)$.

Bew.: O.E. $Q \underset{abg.}{\subseteq} \mathbb{R}^n$ (warum?).

Es gibt $\underline{a} \in \mathbb{R}^n$ und $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ mit

$$Q = \underline{a} + P(\alpha_1 \cdot \underline{e}_1, \dots, \alpha_n \cdot \underline{e}_n).$$

Dann ist $v(Q) = v(P(\alpha_1 \cdot \underline{e}_1, \dots, \alpha_n \cdot \underline{e}_n)) \overset{(D1)}{=} |\alpha_1 \cdot \dots \cdot \alpha_n| \cdot 1$

und $T(Q) = T(\underline{a}) + T(P(\alpha_1 \cdot \underline{e}_1, \dots, \alpha_n \cdot \underline{e}_n))$

$$\underset{(\text{warum?})}{=} T(\underline{a}) + P(\alpha_1 \cdot T(\underline{e}_1), \dots, \alpha_n \cdot T(\underline{e}_n)),$$

also

$$\begin{aligned} v(T(Q)) &= v(P(\alpha_1 \cdot T(\underline{e}_1), \dots, \alpha_n \cdot T(\underline{e}_n)) \\ &\overset{(D1)}{=} |\alpha_1 \cdot \dots \cdot \alpha_n| \, v(T(\underline{e}_1), \dots, T(\underline{e}_n)) \\ &= v(Q) \cdot |\det(T(\underline{e}_1), \dots, T(\underline{e}_n))| \\ &= v(Q) \cdot |\det T|. \end{aligned}$$

□