10. Der Integralsatz von Gauß

„Das Ergebnis habe ich schon, jetzt brauche ich nur noch den Weg, der zu ihm führt.“

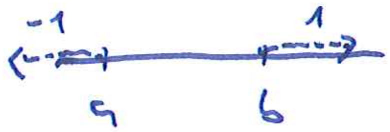
Carl Friedrich Gauß

10.1 Motivation:

~~Erinnerung~~ (i) $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig differenzierbar.

$$\int_{[a,b]} DF(x)\,dx = F(b)-F(a) \overset{?}{=} \int_{\partial[a,b]} ??\; d?$$

$$= F(b)\cdot 1 + F(a)\cdot(-1)$$



$\{a\},\{b\}\subset\mathbb{R}$: 0-dimensionale Untermannigfaltigkeit

$T_a\{a\}=\{0\}$, $T_b\{b\}=\{0\}$,

$N_a\{a\}=\mathbb{R}$, $N_b\{b\}=\mathbb{R}$

Normaleneinheitsvektoren sind jeweils $1,-1\in N_a\{a\}$ bzw. $1,-1\in N_b\{b\}$.

(bzgl $[a,b]$) 1 ist der ‚nach außen‘ zeigende Normaleneinheitsvektor in b, -1 ist der ‚nach außen‘ zeigende Normaleneinheitsvektor in a.

(ii) Wir betrachten nun $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_x\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ F_y\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \cdot x \\ \lambda_2 \cdot y \end{pmatrix}$

für fest $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.

$\rightsquigarrow \quad DF\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad \lambda_1 + \lambda_2 = \mathrm{tr}\left(DF\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)$

$U = (a,b) \times (c,d)$

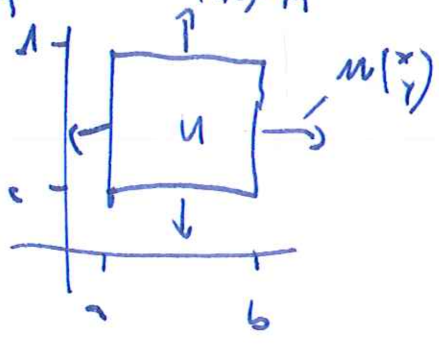
$$\rightsquigarrow \int_U \mathrm{tr}\left(DF\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) d\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (\lambda_1 + \lambda_2)(b-a)(d-c)$$

$$= \left(F_x\begin{pmatrix} b \\ y \end{pmatrix} - F_x\begin{pmatrix} a \\ y \end{pmatrix}\right)(d-c) + \left(F_y\begin{pmatrix} x \\ d \end{pmatrix} - F_y\begin{pmatrix} x \\ c \end{pmatrix}\right)(b-a)$$

$$= \left\langle F\begin{pmatrix} b \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle (d-c) + \left\langle F\begin{pmatrix} a \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle (d-c) + \left\langle F\begin{pmatrix} x \\ d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle (b-a) + \left\langle F\begin{pmatrix} x \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle (b-a)$$

$$= \int_{\{b\} \times (c,d)} \left\langle F\begin{pmatrix} b \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle dS + \int_{\{a\} \times (c,d)} \left\langle F\begin{pmatrix} a \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle dS + \int_{(a,b) \times \{d\}} \left\langle F\begin{pmatrix} x \\ d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle dS + \int_{(a,b) \times \{c\}} \left\langle F\begin{pmatrix} x \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle dS$$

$$= \int_{\partial U} \left\langle F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \underbrace{n\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{\text{Einheitsnormalenfeld}} \right\rangle dS$$



10.2 Satz: Sei $U \underset{\text{offen}}{\subseteq} \mathbb{R}^n$ mit $\mathring{\bar{U}} = U$. Es sei $\partial U \subset \mathbb{R}^n$ eine C^1-Untermannigfaltigkeit der Dimension $n-1$.

Dann existiert genau eine stetige Abbildung

$$N : \partial U \to \mathbb{R}^n$$

mit

(i) $\|N(p)\|_2 = 1$, $p \in \partial U$

(ii) $N(p) \in N_p \partial U$, $p \in \partial U$

$\Big\}$ $N(p)$ ist Einheitsnormalvektor

(iii) $\forall p \in \partial U \; \exists \varepsilon > 0$ mit $p + v \cdot N(p) \notin U$ für alle $v \in [0, \varepsilon]$

[$N(p)$ zeigt nach außen]

N heißt das äußere Einheitsnormalenfeld von ∂U.

Bew.: (1) (Skizze) Beh.: Jedes $p \in \partial U$ besitzt eine Umgebung $p \in W \underset{\text{offen}}{\subseteq} \mathbb{R}^n$ sowie einen C^1-Diffeomorphismus $\varphi : W \to V \underset{\text{offen}}{\subseteq} \mathbb{R}^n$

mit • $\varphi(\partial U \cap W) = (\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}) \cap V$,

• $V = B_\delta(0)$ für ein $\delta > 0$

• $\varphi(U \cap W) = \{ x \in B_\delta(0) \mid x_n < 0 \}$.

Bew.: Nach Wahl einer Karte um p verschieben und verkleinern $V \leadsto \varphi(W) = V = B_\delta(0)$, $\varphi(p) = 0$.

Es gilt nun

$$\varphi(U \cap W) \underset{\text{offen}}{\subseteq} V$$

und $\partial \varphi(U \cap W) \cap V = \varphi(\partial(U \cap W) \cap W) = \varphi(\partial U \cap W)$

$= (\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}) \cap V$,

$= (\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}) \cap B_\delta(0)$.

V ist disjunkte Vereinigung von

$$\underbrace{\varphi(U\cap W)}_{\subset \text{ offen } V},\quad \underbrace{\partial\varphi(U\cap W)\cap V}_{\parallel},\quad \underbrace{V\setminus\overline{\varphi(U\cap W)}}_{\text{offen} \subset V}$$

und von

$$\underbrace{(\mathbb{R}^{n-1}\times(0,\infty))\cap V}_{\text{zusammenhängend}},\quad \overbrace{(\mathbb{R}^{n-1}\times\{0\})\cap V},\quad \underbrace{(\mathbb{R}^{n-1}\times(-\infty,0))\cap V}_{\text{zusammenhängend}}$$

$\Rightarrow\quad \varphi(U\cap W) = (\mathbb{R}^{n-1}\times(0,\infty))\cap V$

oder

$\varphi(U\cap W) = (\mathbb{R}^{n-1}\times(-\infty,0))\cap V$

oder

$\varphi(U\cap W) = (\mathbb{R}^{n-1}\times((-\infty,0)\cup(0,\infty)))\cap V.$

Aber im letzten Fall würde $p\in\mathring{\overline{U\cap W}}\subset\mathring{U}$ gelten, ↯
(denn $p\in\partial U$, U offen)

$\rightsquigarrow$ Nach Reflexion an $\mathbb{R}^{n-1}\times\{0\}$ dürfen wir $\varphi(U\cap W)=\{x\in B_\varepsilon(0)\mid x_n<0\}$ annehmen.

(2) Für $v\in N_p\partial U$ mit $\|v\|=1$ existiert $\varepsilon>0$ mit
$W\supset\{p+\lambda\cdot v\mid\lambda\in[-\varepsilon,\varepsilon]\}\cap\partial U=p$ [warum?]
$\{\ldots[-\varepsilon,0)\}$ und $\{\ldots(0,\varepsilon]\}$ sind zusammenhängend
$\Rightarrow \{p+\lambda\cdot v\mid\lambda\in[0,\varepsilon]\}\cap U=\emptyset$ oder $\{p+\lambda\cdot(-v)\mid\lambda\in[0,\varepsilon]\}\cap U=\emptyset$
$\Rightarrow$ es gibt genau einen Einheitsnormalenvektor $N(p)$ mit
$\{p+\lambda\cdot N(p)\mid\lambda\in[0,\varepsilon]\}\cap U=\emptyset.$

(3) Stetigkeit von $p\mapsto N(p)$: Stetigkeit von $p\mapsto T_p\partial U$ [in welchem Sinn?] □

10.3 <u>Integralsatz von Gauß</u>: Sei $U \underset{\text{offen}}{\subseteq} \mathbb{R}^n$ mit $\mathring{\bar{U}} = U$ und $\bar{U}$ kompakt, und sei $\partial U \subset \mathbb{R}^n$ eine C^1-Untermannigfaltigkeit der Dimension $n-1$. Weiter sei $\bar{U} \subset \tilde{U} \underset{\text{offen}}{\subseteq} \mathbb{R}^n$ und $F : \tilde{U} \to \mathbb{R}^n$ ein C^1-Vektorfeld. Es bezeichne $N : \partial U \to \mathbb{R}^n$ das äußere Einheitsnormalenfeld und $\operatorname{div} F(x) = \operatorname{tr} DF(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_i}{\partial x_i}(x)$ die Divergenz von F. Dann gilt

$$\int_U \operatorname{div} F(x)\, dx = \int_{\partial U} \langle N(p), F(p) \rangle \, dS(p).$$

$\square$