Abgabe Dienstag, 18. Dezember 2018, bis 8.15 Uhr in die jeweiligen Kästen

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Es sei $J\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch $(x_1, x_2, x_3) \mapsto ((1-x_3)(1-x_2)x_1, (1-x_3)x_1x_2, x_1x_3)$.

(a) Zeigen Sie, dass J einen Diffeomorphismus von $(0,\infty) \times (0,1)^2$ nach $(0,\infty)^3$ liefert und bestimmen Sie J^{-1} explizit.

(b) Zeigen Sie, dass $J\big((0,1)^3\big) = \mathring{\Delta}^3$ gilt.
(Erinnerung: Es gilt $\mathring{\Delta}^3 = \{c \in \mathbb{R}^3 \mid c_k > 0 \text{ für } 1 \le k \le 3 \text{ und } c_1 + c_2 + c_3 < 1\}$.)

(c) Berechnen Sie das Volumen von Δ^3 mit Hilfe der Abbildung J.
(Hinweis: Zeigen Sie, dass $\det DJ(x) = x_1^2(1-x_3)$ gilt.)

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Das Thema dieser Übungsaufgabe ist die Flächenmessung im Poincaréschen Modell der hyperbolischen Geometrie. $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) > 0\}$ beschreibe die obere Halbebene der komplexen Zahlen. Eine Teilmenge $A \subset \mathbb{H} \subset \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ heißt hyperbolisch messbar, wenn das Lebesgue-Integral

$$\nu_h(A) := \int_A \frac{1}{y^2}\, d(x,y)$$

existiert. In diesem Fall heißt $\nu_h(A)$ der hyperbolische Flächeninhalt von A. Weiter nennt man eine Abbildung $T\colon \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ hyperbolische Bewegung, falls

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

für gewisse $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit $ad - bc = 1$ gilt.
Zeigen Sie, dass $\nu_h(T(A)) = \nu_h(A)$ für jedes hyperbolisch messbare A und jede hyperbolische Bewegung T gilt.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Gibt es eine σ-Algebra, die aus abzählbar unendlich vielen Elementen besteht?

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Sei X eine Menge und $S \subset \mathcal{P}(X)$. Zeigen Sie, dass eine bezüglich Inklusion kleinste Topologie $\mathcal{T}(S)$ existiert, die S enthält.