Abgabe Dienstag, 08. Januar 2019, bis 8.15 Uhr in die jeweiligen Kästen

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Es sei (X, Σ) ein messbarer Raum, $(Y, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $f: X \to Y$ eine Abbildung.

(a) Es sei $Y = \mathbb{R}$ und Y versehen mit der Borelschen σ-Algebra. Zeigen Sie, dass f genau dann messbar ist, wenn für jedes $r \in \mathbb{Q}$ die Menge $\{x \in X \mid f(x) \geq r\}$ messbar in (X, Σ) ist.

(b) Es sei $Y = (-\infty, \infty]$ und $\mathcal{T}$ die von $\mathcal{T}_{\mathbb{R}}$ und $\{(\alpha, \infty] \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ erzeugte Topologie. Zeigen Sie: Ist $f^{-1}((\alpha, \infty]) \in \Sigma$ für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$, so ist f messbar.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Es sei (X, Σ) ein messbarer Raum und $\mathbb{R}$ versehen mit der Borelschen σ-Algebra. Zeigen Sie die folgenden Behauptungen:

(a) Für zwei messbare Abbildungen $f, g: X \to \mathbb{R}$ sind die Mengen

$$\{x \in X \mid f(x) > g(x)\} \text{ und } \{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$$

messbar.

(b) Für eine Folge messbarer Abbildungen $f_n: X \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ ist die Menge

$$\{x \in X \mid (f_n(x))_{n \in \mathbb{N}} \text{ konvergiert}\}$$

messbar.

Aufgabe 3 (6 Punkte)
(a) Es sei X überabzählbar und

$$\Sigma := \{Y \subset X \mid Y \text{ höchstens abzählbar oder } Y^c = X \setminus Y \text{ höchstens abzählbar }\}.$$

Zeigen Sie, dass Σ eine σ-Algebra ist.

(b) Zeigen Sie, dass in der Situation von Teil (a) durch

$$\mu(Y) := \begin{cases} 1, & Y \text{ überabzählbar} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

ein Maß auf (X, Σ) definiert wird.

(c) Es sei (X, Σ) ein messbarer Raum, $X_0 \subset X$ und $\Sigma_0 := \{Y \cap X_0 \mid Y \in \Sigma\}$.
Zeigen Sie, dass (X_0, Σ_0) ein messbarer Raum ist und dass für jede messbare Abbildung $f: X \to (-\infty, \infty]$ die Einschränkung $f_{|X_0}: X_0 \to (-\infty, \infty]$ messbar bezüglich Σ_0 ist.

(d) Zeigen Sie, dass in der Situation von Teil (d) für $X_0 \in \Sigma$ und eine messbare Abbildung $f: X_0 \to (-\infty, \infty]$ die Vorschrift

$$f_{X_0}(x) := \begin{cases} f(x), & x \in X_0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

eine messbare Abbildung $f_{X_0}: X \to (-\infty, \infty]$ definiert.