Übungen zur Analysis 3 **Blatt 03**
W. Winter, S. Gemsa **WS 2018/19**

Abgabe Dienstag, 30. Oktober 2018, bis 8.15 Uhr in die jeweiligen Kästen

Aufgabe 1 (6 Punkte)

Diese Aufgabe beschäftigt sich mit halbstetigen Funktionen. Dabei heißt eine Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ *halbstetig von unten*, falls für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ die Menge

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) > \alpha\}$$

offen ist. Zeigen Sie:

(a) Ist $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, so ist χ_U halbstetig von unten. Ist $A \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen, so ist $-\chi_A$ halbstetig von unten.

(b) Jede Treppe (siehe Blatt 01, Aufgabe 05) $\Phi = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \chi_{Q_k}$ definiert durch $x \mapsto \Phi(x) := \sum_{k=1}^{\infty} c_k \chi_{Q_k}(x)$ eine von unten halbstetige Funktion Φ auf $\mathbb{R}^n$. Diese ist integrierbar, falls der Inhalt $I(\Phi)$ endlich ist, und dann gilt $\int \Phi(x)\,\mathrm{d}x = I(\Phi)$.

(c) Jede von unten halbstetige Funktion $f \geq 0$ ist die (punktweise) Grenzfunktion einer monoton wachsenden Folge von Treppenfunktionen.

(d) Jede von unten halbstetige, beschränkte Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, die außerhalb eines Kompaktums verschwindet, ist Lebesgue-integrierbar.

Aufgabe 2 (6 Punkte)

In Analysis 2 haben wir gesehen, dass es sogenannte raumfüllende stetige Funktionen gibt, z. B. Funktionen, die das Intervall $[0,1]$ stetig auf den ganzen Quader $[0,1]^2$ abbilden (vgl. Analysis 2, Blatt 06, Aufgabe 4). Eng damit verbunden sind stetige Funktionen, die eine Nullmenge auf eine nicht-Nullmenge abbilden.
Dabei heit $N \subset \mathbb{R}^n$ (Lebesgue-)Nullmenge, falls $\|\chi_N\|_1 = 0$.
Eine solche Funktion ist z. B. die sogenannte Teufelsleiter $f\colon [0,1] \to [0,1]$, die das Cantorsche Diskontinuum $C \subset [0,1]$ (eine Nullmenge) auf das ganze Intervall $[0,1]$ abbildet (vgl. Analysis 2, Blatt 05, Aufgabe 3).
In dieser Aufgabe werden wir sehen, dass dieses (kontraintuitive) Verhalten bei Lipschitz-stetigen Funktionen nicht auftritt.
Ein *Würfel* im $\mathbb{R}^m$ ist ein Quader $W = I_1 \times \cdots \times I_m$, so dass die Intervalle $I_1, \cdots, I_m$ die gleiche Länge haben. Zeigen Sie zur Vorbereitung:

(a) Für jeden offenen Quader $Q \subset \mathbb{R}^m$ und jedes $\epsilon > 0$ existieren endlich viele offene Würfel $W_k \subset \mathbb{R}^m$, so dass $Q \subset \bigcup_k W_k$ und $\sum_k v(W_k) \leq v(Q) + \epsilon$.

Es sei nun $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ eine Lipschitz-stetige Abbildung (mit $m, n \geq 1$). Zeigen Sie:

(b) Falls $m = n$, dann ist $f(A) \subset \mathbb{R}^n$ eine Nullmenge für jede Nullmenge $A \subset \mathbb{R}^m$.

(c) Falls $m < n$, dann ist $f(A) \subset \mathbb{R}^n$ eine Nullmenge für jede Menge $A \subset \mathbb{R}^m$.

(d) Geben Sie für den Fall $m > n$ ein Beispiel einer Lipschitz-stetigen Funktion $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ an, die eine Nullmenge $A \subset \mathbb{R}^m$ auf eine nicht-Nullmenge $f(A) \subset \mathbb{R}^n$ abbildet.

Aufgabe 3 befindet sich auf der Rückseite.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Als Schwerpunkt einer messbaren Menge $K \subset \mathbb{R}^n$ mit positivem Volumen v definiert man im Existenzfall den Punkt $s = (s_1, \cdots, s_n) \in \mathbb{R}^n$ mit

$$s_k = \frac{1}{v} \int_K x_k \, \mathrm{d}(x_1, \ldots, x_n),$$

für $k = 1, \ldots, n$. Berechnen Sie den Schwerpunkt der folgenden Mengen:

(a) Der Simplex $\Delta^3 = \{(t_1, t_2, t_3) \in \mathbb{R}^n \mid t_1, t_2, t_3 \geq 0 \text{ und } t_1 + t_2 + t_3 \leq 1\}$.

(b) Der Halbkreis $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1 \text{ und } y \geq 0\}$.