Abgabe Dienstag, 06. November 2018, bis 8.15 Uhr in die jeweiligen Kästen

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Das Ziel dieser Aufgabe ist es, eine allgemeinere Version des Mittelwertsatzes zu zeigen. Dazu benötigen wir das folgende Konzept: Ein topologischer Raum X heißt *zusammenhängend*, wenn $\emptyset$ und X die einzigen Teilmengen von X sind, die gleichzeitig offen und abgeschlossen sind. Eine Teilmenge $A \subset X$ heißt zusammenhängend, wenn A mit der Teilraumtopologie zusammenhängend ist.

(a) Es sei $f\colon X \to Y$ eine stetige Abbildung zwischen topologischen Räumen. Zeigen Sie: Falls X zusammenhängend ist, dann ist auch $f(X)$ zusammenhängend.

(b) Es sei $A \subset \mathbb{R}^n$ eine zusammenhängende, kompakte Teilmenge. Es sei weiterhin $f\colon A \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann existiert ein $\xi \in A$ mit $\int_A f(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)v(A)$.

(Hinweis: Sie können ohne Beweis verwenden, dass jede kompakte zusammenhängende Teilmenge $M \subset \mathbb{R}$ von der Form $M = [c, d]$ ist. Folgern Sie dann mit (a), dass insbesondere $f(A)$ von der Form $[c, d]$ ist.)

Aufgabe 2 (4 Punkte)

(a) Aus der Kugel $K := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \leq r\}$ vom Radius $r > 0$ werde der Zylinder $Z = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \sqrt{x^2 + y^2} \leq \rho\}$ ausgebohrt, wobei $0 < \rho < r$. Berechnen Sie das Volumen des Restes $R_Z := K \setminus Z$.

(b) Statt Z werde jetzt der Stab $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid |x|, |y| \leq a\}$ mit quadratischem Querschnitt ausgebohrt. Die Querschnittsfläche von S sei gleich der von Z, d. h., $4a^2 = \pi\rho^2$. Wir setzen $R_S = K \setminus S$. Entscheiden Sie, welche der folgenden Beziehungen gilt:

$$v(R_Z) = v(R_S), \quad v(R_Z) < v(R_S), \quad v(R_Z) > v(R_S).$$

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Zeigen Sie:

(a) Eine Nullmenge im $\mathbb{R}^n$ hat keine inneren Punkte. (Ein Punkt x eines topologischen Raums X heißt *innerer Punkt*, falls es eine offene Menge $U \subset X$ gibt, so dass $x \in U$.)

(b) Eine stetige Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $\|f\|_1 = 0$ ist die Nullfunktion.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Es sei $f\colon K \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion auf einer kompakten Menge $K \subset \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie:

(a) Im Fall $f \geq 0$ gibt es eine monoton fallende Folge $(\varphi_k)_k$ von Treppenfunktionen auf $\mathbb{R}^n$, die punktweise gegen f_K konvergiert.

(b) Zeigen Sie mit Hilfe von (a), dass f über K integrierbar ist.