Abgabe Dienstag, 27. November 2018, bis 8.15 Uhr in die jeweiligen Kästen

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Es sei $C_c(\mathbb{R}^n)$ der Raum der stetigen Funktionen auf $\mathbb{R}^n$ mit kompaktem Träger. Wir betrachten die Abbildung $\Phi\colon C_c(\mathbb{R}^n) \to L^1(\mathbb{R}^n)$, die eine Funktion $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$ auf die Nebenklasse $[f] \in L^1(\mathbb{R}^n)$ schickt.

Zeigen Sie: Φ ist injektiv und hat dichtes Bild in $L^1(\mathbb{R}^n)$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Es sei $f\colon \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$ eine integrierbare Funktion. Zeigen Sie: Für jedes $c > 0$ ist die Menge $A_c := \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \geq c\}$ messbar und hat ein Maß $v(A_c) \leq \frac{1}{c}\|f\|_1$.

(Hinweis: Man konstruiere eine integrierbare Funktion $g\colon \mathbb{R}^n \to [0,1]$ so, dass $A_c = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g(x) = 1\}$ gilt und man betrachte die Folge $(g^k)_k$.)

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Geben Sie ein Beispiel einer Funktion $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ an, so dass f differenzierbar ist, aber die Ableitung f' nicht beschränkt ist.
Können Sie f so konstruieren, dass f' (i) integrierbar (ii) nicht integrierbar ist?