Abgabe Dienstag, 04. Dezember 2018, bis 8.15 Uhr in die jeweiligen Kästen

Aufgabe 1 (4 Punkte)

(a) Für $(x, y) \in (0, 1)^2$ sei $f(x, y) = \frac{x-y}{(x+y)^3}$. Zeigen Sie:

$$\int_0^1 \Big(\int_0^1 f(x, y)\, \mathrm{d}x \Big)\, \mathrm{d}y \neq \int_0^1 \Big(\int_0^1 f(x, y)\, \mathrm{d}y \Big)\, \mathrm{d}x.$$

(b) Es sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(0, 0) = 0$ und $f(x, y) = \frac{\operatorname{sgn}(xy)}{x^2+y^2}$ für $(x, y) \neq (0, 0)$. Hierbei bezeichnet $\operatorname{sgn}(z) = \frac{z}{|z|}$ das Signum von $z \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Zeigen Sie, dass zwar

$$\int_{\mathbb{R}} \Big(\int_{\mathbb{R}} f(x, y)\, \mathrm{d}x \Big)\, \mathrm{d}y = 0 = \int_{\mathbb{R}} \Big(\int_{\mathbb{R}} f(x, y)\, \mathrm{d}y \Big)\, \mathrm{d}x$$

gilt, f jedoch nicht über $\mathbb{R}^2$ integrierbar ist.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Es sei $R > 0$ und $n \in \mathbb{N}$.

(a) Bestimmen Sie das Volumen $v(B_{\mathbb{R}^n}(0, R))$ der Kugel mit Radius R um 0 im $\mathbb{R}^n$.

(Hinweis: Nutzen Sie die Rekursionsformel der Gammafunktion.)

(b) Wie verhält sich $v(B_{\mathbb{R}^n}(0, R))$ für festes R und $n \to \infty$?

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Es sei $f\colon [a, b] \to [0, \infty)$ eine stetige Funktion und $\tilde{f}\colon K_{a,b} \to [0, \infty)$ gegeben durch $\tilde{f}(x) := f(\|x\|_2)$, wobei $K_{a,b} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid a \leq \|x\|_2 \leq b\}$ die Kugelschale mit Innenradius a und Außenradius b bezeichnet. Zeigen Sie, dass $\tilde{f}$ integrierbar ist und

$$\int_{K_{a,b}} \tilde{f}(x)\, \mathrm{d}x = n\kappa_n \int_a^b f(y) y^{n-1}\, \mathrm{d}y$$

gilt, wobei $\kappa_n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}$ das Volumen der n-dimensionalen Einheitskugel bezeichnet.

(Hinweis: Betrachten Sie zunächst den Fall einer Treppenfunktion und nutzen Sie danach den Satz von Beppo Levi. Dabei dürfen Sie ohne Beweis benutzen, dass f durch eine monoton wachsende Folge von Treppenfunktionen approximiert werden kann.)