Aufgabe 1 (4 Punkte)

Die *spezielle lineare Gruppe* $\mathrm{SL}(n) := \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid \det A = 1\}$. Zeigen Sie:

(a) $\mathrm{SL}(n)$ ist eine (n^2-1)-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $M_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$.

(b) $\mathrm{T}_E\,\mathrm{SL}(n)$ ist der Vektorraum der $(n\times n)$-Matrizen mit Spur 0, wobei $E \in M_n(\mathbb{R})$ die Einheitsmatrix bezeichne. Ist A eine Matrix mit Spur 0, so definiert $\gamma(t) := e^{tA},\ t \in \mathbb{R}$, eine Kurve in $\mathrm{SL}(n)$ mit $\gamma(0) = E$ und $\dot\gamma(0) = A$.

(Hinweis: Sie können ohne Beweis verwenden, dass für jede Matrix $A \in M_n(\mathbb{R})$ die Beziehung $\det e^A = e^{\mathrm{Spur}\,A}$ gilt.)

Lösung: (a) Notice that $\mathrm{SL}(n) = \det^{-1}(\{1\})$ and $\det\colon M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ is a smooth map (being a polynomial in the matrix entries). Thus, if we show that 1 is a regular value of det, it will follow by the Regular Value Theorem (Satz 8.6) that $\mathrm{SL}(n)$ is a sub-manifold of dimension $\dim(M_n(\mathbb{R})) - \dim(\mathbb{R}) = n^2-1$.
To show that 1 is a regular value, we have to prove that for every $A \in \mathrm{SL}(n)$ the differential

$$(D\det)(A)\colon M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$$

is surjective. As a linear functional, it is enough to show that it does not vanish. Evaluating at A gives:

$$\begin{aligned}
(D\det)(A)(A) &= \lim_{t\to 0} \frac{\det(A+tA) - \det(A)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{(1+t)^n \det(A) - \det(A)}{t} \\
&= \det(A) \cdot \lim_{t\to 0} \frac{(1+t)^n - 1}{t} \\
&= \det(A)\cdot n = n \neq 0.
\end{aligned}$$

This concludes the proof.

(b) Let $A \in M_n(\mathbb{R})$ be such that $\mathrm{tr}(A) = 0$. Using the hint, we see that for every $t \in \mathbb{R}$ we have

$$\det(e^{tA}) = e^{\mathrm{tr}(tA)} = e^{t\cdot\mathrm{tr}(A)} = e^0 = 1.$$

Hence we may define a curve $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathrm{SL}(n) : t \mapsto e^{tA}$. Clearly, $\gamma(0) = E$. Moreover,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} e^{tA} &= \frac{d}{dt}\left[E + tA + \frac{1}{2}t^2A^2 + \frac{1}{3!}t^3A^3 + \cdots\right] \\
&= A + tA^2 + \frac{1}{2}t^2A^3 + \cdots \\
&= Ae^{tA}.
\end{aligned}$$

Thus, $\dot\gamma(0) = A$. It therefore follows that all matrices with trace zero are tangent to the manifold $\mathrm{SL}(n)$. The dimension of the set of $n \times n$ matrices with trace zero is n^2-1, as it is the null space of the surjective linear map $\mathrm{tr}\colon \mathbb{R}^{n^2} \to \mathbb{R}$. From (a), this dimension coincides with the dimension of $\mathrm{SL}(n)$. By 8.8 (i) we know that $\dim(\mathrm{T}_E\,\mathrm{SL}(n)) = n^2-1$ and hence (having the same dimensions)

$$\mathrm{T}_E\,\mathrm{SL}(n) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid \mathrm{tr}(A) = 0\}.$$

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Eine *Einbettung der reellen projektiven Ebene* $\mathbb{P}^2$ *in den* $\mathbb{R}^6$. Die Punkte von $\mathbb{P}^2$ sind per definitionem die Geraden des $\mathbb{R}^3$ durch den Nullpunkt; $\mathbb{P}^2$ kann auch mit der Menge der ungeordneten Paare von Antipoden $p, -p$ der Sphäre S^2 identifiziert werden. Eine bijektive Abbildung des $\mathbb{P}^2$ auf eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^6$ erhält man mit Hilfe von

$$f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^6, \quad f(x,y,z) := (x^2, y^2, z^2, yz, zx, xy).$$

Zeigen Sie:

(a) Für $p, q \in S^2$ gilt genau dann $f(p) = f(q)$, wenn $q = \pm p$. $\mathbb{P}^2$ kann also mit $M := f(S^2)$ identifiziert werden.

(b) M ist eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^6$.

Lösung:
(a) For convenience, we work with f restricted to S^2. Clearly,

$$f(-x,-y,-z) = (x^2, y^2, z^2, yz, zx, xy) = f(x,y,z),$$

so $f(p) = f(-p)$ for all $p \in S^2$. Thus, f induces a map $\tilde{f}\colon \mathbb{P}^2 \to \mathbb{R}^6$, $\tilde{f}([x,y,z]) := f(x,y,z)$. We now have a commutative diagram

$$\begin{tikzcd} S^2 \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi"'] & & \mathbb{R}^6 \\ & \mathbb{P}^2 \arrow[ur, "\tilde{f}"'] & \end{tikzcd}$$

It is left to show that $\tilde{f}$ is injective. Assume $f(x_1, y_1, z_1) = f(x_2, y_2, z_2)$. Comparing the first three coordinates, we conclude that $|x_1| = |x_2|$, $|y_1| = |y_2|$ and $|z_1| = |z_2|$. As $0 \notin S^2$, we may assume w.l.o.g. that $x_1 \neq 0$.

- If $x_1 = x_2$: Comparing the 5-th coordiante: $z_1 x_1 = z_2 x_2 \Rightarrow z_1 = z_2$.
  Comparing the 6-th coordinate: $x_1 y_1 = x_2 y_2 \Rightarrow y_1 = y_2$.

- If $x_1 = -x_2$: Comparing the 5-th coordiante: $z_1 x_1 = z_2 x_2 = -z_2 x_1 \Rightarrow z_1 = -z_2$.
  Comparing the 6-th coordinate: $x_1 y_1 = x_2 y_2 = -x_1 y_2 \Rightarrow y_1 = -y_2$.

Thus $(x_1, y_1, z_1) \in \{(x_2, y_2, z_2), (-x_2, -y_2, -z_2)\}$, as required.

(b) We need to show that $\tilde{f}$ is an immersion. Indeed, by (a) it would then follow that $\tilde{f}$ is an injective immersion and as $\mathbb{P}^2$ is compact (as a continuous image of S^2 under π), $\tilde{f}$ is a homeomorphism onto its image $\tilde{f}(\mathbb{P}^2)$ in $\mathbb{R}^6$, and also a sub-manifold of the latter. Note that π is a local diffeomorphism, namely it is a smooth map which is locally invertible. Locally, we can write $\tilde{f} = f \circ \pi^{-1}$. Thus, it is enough to show that f is an immersion. We calculate the Jacobi matrix of f as a function of $\mathbb{R}^3$:

$$J_{(x,y,z)} f = \begin{bmatrix} 2x & 0 & 0 \\ 0 & 2y & 0 \\ 0 & 0 & 2z \\ 0 & z & y \\ z & 0 & x \\ y & x & 0 \end{bmatrix}$$

It is easy to check that if $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$, the equation $J_{(x,y,z)}f \cdot (a, b, c) = 0$ leads to the unique solution $(a, b, c) = (0, 0, 0)$. Thus the matrix has rank 3, so it is an injective linear map $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^6$. In particular, restricted to the tangent plane of S^2, it is still injective. Hence, the map has rank 2 at $(x, y, z) \in S^2$ regarded as a map of S^2. This concludes the proof that f is an immersion. For the dimension assertion, note that since f and $\tilde{f}$ are immersions and differ by a composition with the local diffeomorphim π, we have:

$$\dim(M) = \dim(\tilde{f}(\mathbb{P}^2)) = \mathrm{Rank}(\tilde{f}) = \mathrm{Rank}(f) = \dim(S^2) = 2.$$

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Der Kreis $\alpha(v) = (R + a\cos(v), a\sin(v))$, $v \in \mathbb{R}$, mit $0 < a < R$ ergibt die Immersion

$$\gamma(u, v) = ((R + a\cos(v))\cos(u), (R + a\cos(v))\sin(u), a\sin(v)), \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2.$$

Ihre Spur T wird als Torus bezeichnet. Für jede reelle Zahl λ ist dann $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $g(t) := \gamma(t, \lambda t)$, eine reguläre Kurve in T.

Zeigen Sie, dass die Spur $g(\mathbb{R})$ für rationales λ eine kompakte Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ ist.

Lösung: Wir zeigen zuerst, dass $g(\mathbb{R})$ kompakt ist. Wir schreiben $\lambda = \frac{p}{q}$ mit $p, q \in \mathbb{Z}$. Wir nehmen außerdem an, dass p und q teilerfremd sind. Sei $l := 2\pi q$. Dann gilt

$$\begin{aligned} g(t + l) = g(t + 2\pi q) &= \gamma(t + 2\pi q, \lambda t + 2\pi p) \\ &= ((R + a\cos(\lambda t + 2\pi p))\cos(t + 2\pi q), \\ &\qquad (R + a\cos(\lambda t + 2\pi p))\sin(t + 2\pi q), a\sin(\lambda t + 2\pi p)) \\ &= ((R + a\cos(\lambda t))\cos(t), (R + a\cos(\lambda t))\sin(t), a\sin(\lambda t)) \\ &= \gamma(t, \lambda t) = g(t). \end{aligned}$$

Es gilt also $g(\mathbb{R}) = g([0, l])$. Da g stetig ist und $[0, l]$ kompakt, ist auch $g(\mathbb{R})$ kompakt. Sei $\phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto (t, \lambda t)$. Dann ist

$$(Dg)(t) = (D\gamma \circ \phi)(t) = (D\gamma)(\phi(t)) \circ (D\phi)(t).$$

Da $(D\phi)(t) = (1, \lambda)^t$ injektiv ist muss auch $(Dg)(t)$ injektiv sein, da γ eine Immersion ist. Nun ist

$$\tilde{g}\colon [0, l) \to T : t \mapsto g(t)$$

eine Einbettung und mit Satz 8.13 ist dann $g(\mathbb{R}) = \tilde{g}([0, l))$ eine Untermannigfaltigkeit von T.

Zusatzaufgabe (4 Punkte)

Es gelten die Bezeichnungen aus Aufgabe 3.
Zeigen Sie, dass die Spur $g(\mathbb{R})$ für irrationales λ keine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ ist; $g(\mathbb{R})$ liegt in diesem Fall dicht im Torus.

Lösung: Wir zeigen zuerst, dass $g(\mathbb{R})$ dicht in T liegt. Dies ist der Fall, falls $g(\mathbb{R})$ jede offene Umgebung eines Punktes $x \in T$ schneidet. Wir vereinfachen das Problem und identifizieren T via γ mit $\mathbb{R}^2/2\pi\mathbb{Z}^2$. Dann ist die zu zeigende Aussage äquivalent zu:

(*) $\qquad \forall x, y \in [0, 2\pi],\ \varepsilon > 0\ \exists t \in \mathbb{R},\ m, n \in \mathbb{Z} : \|(t, \lambda t) - (x + 2\pi n, y + 2\pi m)\| < \varepsilon.$

Untergruppen von $(\mathbb{R}, +)$ haben entweder Rang 1 oder liegen dicht in $\mathbb{R}$. Die Untergruppe $(\mathbb{Z} + \lambda\mathbb{Z}, +)$ von $(\mathbb{R}, +)$ ist daher eine dichte Teilmenge von $\mathbb{R}$ und wir finden $m, n \in \mathbb{Z}$ mit

$$|(\lambda x - y) - 2\pi(m - \lambda n)| < \varepsilon.$$

Setze nun $t := x + 2\pi n$. Dann gilt

$$|\lambda t - y - 2\pi m| = |\lambda x + \lambda 2\pi n - y - 2\pi m| < \varepsilon.$$

Somit ist $(*)$ bewiesen.
Mit der Identifikation wie oben sieht man darüber hinaus, dass $g(\mathbb{R})$ nicht lokal wegzusammenhängend sein kann. Daher ist $g(\mathbb{R})$ keine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$.