Aufgabe 1:
Sei A eine unitale C*-Algebra.
a) Sei $a \in A$ invertierbar, dann ist $a = u(a^*a)^{\frac{1}{2}}$ für ein eindeutig bestimmtes unitäres Element $u \in A$.
b) Man gebe ein Beispiel für ein Element $a \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, welches nicht in der Form $u(a^*a)^{\frac{1}{2}}$ mit unitärem Element $u \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ geschrieben werden kann.
c) Sei $a \in \mathrm{Inv}(A)$, dann ist $\|a\| = \|a^{-1}\| = 1$ genau dann wenn a unitär ist.
d) Sei $u \in A$ unitär mit $\sigma(u) \neq \mathbb{T}$, dann existiert $h \in A_{\mathrm{sa}}$ mit $u = e^{ih}$.
e) Sei $u \in A$ unitär mit $\|1 - u\| < 2$, dann gilt $\sigma(u) \neq \mathbb{T}$.

Aufgabe 2:
Sei A eine C*-Algebra. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:
(i) A ist σ-unital, d.h., A besitzt eine abzählbare approximative Eins.
(ii) A besitzt eine idempotente abzählbare approximative Eins, d.h., eine approximative Eins $(e_n)_{\mathbb{N}}$ mit $e_n e_{n+1} = e_n$ für $n \in \mathbb{N}$.
(iii) A besitzt ein strikt positives Element, d.h., ein Element $h \in A_+$ mit $A = \overline{hAh}$.

Hinweis: Am besten zeigt man wohl (i) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (ii)$\Rightarrow$ (i). Für die erste Implikation wähle man eine abzählbare approximative Eins $(e_n)_{\mathbb{N}}$ und definiere h, so dass h jedes e_n bis auf einen skalaren Faktor dominiert; man zeige dann, dass $(1 - h^{1/k})e_n \xrightarrow{k\to\infty} 0$ und folgere, dass $e_n \in \overline{hAh}$. Die zweite Implikation folgt mit Funktionalkalkül.

Aufgabe 3:
Sei A separabel. Dann ist A σ-unital.

Abgabe Donnerstag, 24.11. in der Vorlesung.