Aufgabe 1:
Sei $\epsilon > 0$ gegeben. Man zeige, dass ein $\delta > 0$ existiert, so dass folgendes gilt: Falls A eine C*-Algebra ist und $a \in A$

$$\|a - a^*\| \leq \delta \qquad \text{und} \qquad \|a - a^2\| \leq \delta,$$

erfüllt, dann existiert eine Projektion $p \in A$ mit $\|a - p\| \leq \epsilon$.
(Hinweis: Es genügt, den Fall $\epsilon < 1/2$ zu betrachten. Setze $b = (a + a^*)/2$. Zeige, dass

$$\sigma(b) \subseteq [-\epsilon, \epsilon] \cup [1 - \epsilon, 1 + \epsilon]$$

falls $\|b - b^2\| \leq \epsilon - \epsilon^2$, und wende Funktionalkalkül auf b an.)

Aufgabe 2:
Sei A eine unitale C*-Algebra mit Projektionen $p, q \in A$.
a) Falls $\|p - q\| < 1$, so existiert ein Unitäres $u \in A$ so dass $uqu^* = p$.
(Hinweis: Polarzerlegung von $pq + (1 - p)(1 - q)$.)
b) Falls $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Projektionen in A ist und $p_n \to q \in A$ für $n \to \infty$, so existieren Unitäre $u_n \in A$ so dass $u_n \to 1$ für $n \to \infty$ und $u_n^* p_n u_n = q$ für n hinreichend groß.

Aufgabe 3:
Sei A eine C*-Algebra, und sei $(p_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ eine Folge von Projektionen mit $p_n a \xrightarrow{n\to\infty} a$ für alle $a \in A$. Dann besitzt A eine *aufsteigende* approximative Eins aus Projektionen.

Abgabe Donnerstag, 15.12. in der Vorlesung.