Aufgabe 1:
Sei $(p_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ ein Netz von Projektionen in $B(\mathcal{H})$. Man zeige:
a) Falls $(p_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ aufsteigend ist, so konvergiert es stark gegen p, wo p die Projektion auf den Abschluss der Vereinigung der $p_\lambda(\mathcal{H})$ ist.
b) Falls $(p_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ absteigend ist, so konvergiert es stark gegen q, wo q die Projektion auf den Durchschnitt der $p_\lambda(\mathcal{H})$ ist.

Aufgabe 2:
Sei $\mathcal{H} = \ell^2(\mathbb{N})$. Man zeige, dass Multiplikation auf $B(\mathcal{H})$ (als Abbildung von $B(\mathcal{H}) \times B(\mathcal{H})$ nach $B(\mathcal{H})$) nicht stark stetig ist. Dabei kann man z.B. wie folgt vorgehen:
Sei Λ die Menge aller Paare (n, U) wo $n \in \mathbb{N}$ und U eine starke Umgebung der 0 in $B(\mathcal{H})$ ist. Definiere

$$(U, n) \le (U', n') \iff n \le n' \text{ und } U' \subseteq U.$$

a) Zeige, dass $(\Lambda, \le)$ mit dieser partiellen Ordnung gerichtet ist.
Sei S der unilaterale Shift.
b) Zeige, dass $(S^*)^n$ stark gegen 0 konvergiert für $n \to \infty$.
Falls $\lambda = (n_\lambda, U_\lambda) \in \Lambda$, so gilt s.o.$-\lim_{n\to\infty}(n_\lambda(S^*)^n) = 0$, so dass wir für ein $n \in \mathbb{N}$ $n_\lambda(S^*)^n \in U_\lambda$ haben. Setze $S_\lambda = n_\lambda(S^*)^n$ und $T_\lambda = \frac{1}{n_\lambda}S^n$.
c) Zeige, dass s.o.$-\lim_\lambda S_\lambda = 0$ und $T_\lambda \to 0$ in Norm.
d) Folgere, dass Multiplikation nicht stark stetig ist.

Aufgabe 3:
Sei $A \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H})$ eine abelsche C*-algebra, und sei B der starke Abschluss. Man zeige, dass B eine abelsche von Neumann Algebra ist.

Abgabe Donnerstag, 22.12. in der Vorlesung.