9. Die 6-Term Sequenz

9.1 Satz: Sei $0 \to J \xrightarrow{\iota} A \xrightarrow{\pi} B \to 0$ eine kurze exakte Sequenz von C^*-Algebren.

Dann existiert ein Homomorphismus δ_1 so dass

$$\begin{tikzcd}
K_0(J) \arrow[r, "K_0(\iota)"] & K_0(A) \arrow[r, "K_0(\pi)"] & K_0(B) \\
K_1(B) \arrow[u, "\delta_1"] & K_1(A) \arrow[l, "K_1(\pi)"'] & K_1(J) \arrow[l, "K_1(\iota)"']
\end{tikzcd} \qquad (*)$$

exakt ist.

Für $u \in \mathcal{U}_n(B^+)$ ist $\delta_1([u]_1) = [p]_0 - [s_J(p)]_0$

für $p \in P_{2n}(J^+)$ mit $\iota^{+(2n)}(p) = v\begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} v^*$

und $v \in \mathcal{U}_{2n}(A^+)$ mit $\pi^{+(2n)}(v) = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u^* \end{pmatrix}$.

δ_1 ist natürlich, d.h.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & J \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{III}"] & A \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{III}"] & B \arrow[r] \arrow[d, "\beta"] & 0 \\
0 \arrow[r] & J' \arrow[r] & A' \arrow[r] & B' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{tikzcd}
K_1(B) \arrow[r, "\delta_1"] \arrow[d, "K_1(\beta)"'] & K_0(J) \arrow[d, "K_0(\gamma)"] \\
K_1(B') \arrow[r, "\delta_1"] & K_0(J')
\end{tikzcd} \quad \text{kommutiert.}$$

Bew. (Idee): $\begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u^* \end{pmatrix} \sim_h 1_{2n}$ in $\mathcal{U}_{2n}(B^+)$

$$= e^{ih_1} \cdots e^{ih_k}$$

$$\overset{[\pi \text{ surjektiv}]}{=} e^{i\pi^{+(2n)}(d_1)} \cdots e^{i\pi^{+(2n)}(d_k)}$$

$\rightsquigarrow v = e^{id_1} \cdots e^{id_k} \in \mathcal{U}_{2n}(A^+)$ erfüllt $\pi^{+(2n)}(v) = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u^* \end{pmatrix}$
[vgl. Prop. 7.7]

und es gilt $\pi^{+(2n)}\left(v \begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} v^*\right) = \begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in P_{2n}(B^+)$.

wie in Prop. 7.8
$\rightsquigarrow$ $\exists\, p \in P_{2n}(J^+)$: $\iota^{+(2n)}(p) = v \begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} v^*$, $s_J(p) = \begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Überprüfe: $\delta_1([u]_1) = [p]_0 - [s_J(p)]_0$ ist wohldefiniert,

und (*) ist exakt und natürlich. $\square$

9.2 Wir schreiben SA für die Einhängung

$$SA := C_0((0,1)) \otimes A$$

und $S^n A := S S^{n-1} A$.

Wissen aus Kapitel 2: $S.$ ist ein exakter Funktor.

$\left[\begin{array}{l} C_0((0,1)) \otimes \_ \text{ ist exakt nach Prop. 2.4;} \\ C_0((0,1)) \text{ ist nuklear nach Satz 1.21.} \end{array} \right]$

<u>Satz</u> Sei A eine C^*-Algebra. Dann gibt es einen natürlichen Isomorphismus

$$\Theta_A : K_1(A) \to K_0(SA).$$

Für $u \in \mathcal{U}_n(A^+)$ mit $s_A(u) = 1_n$ (vgl. Bem. 8.4(i)) ist $\Theta_A([u]_1) = [p]_0 - [s_A(p)]_0$

für $p \in \mathcal{P}_{2n}((SA)^+)$ mit $p = v\begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}v^*$, $s_{SA}(p) = \begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,

$v \in \mathcal{U}_{2n}(C([0,1], A^+))$, $v(0) = 1_{2n}$, $v(1) = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u^* \end{pmatrix}$

und $s_A(v(t)) = 1_{2n}$, $t \in [0,1]$.

Bew.: Betrachte $0 \to SA \xrightarrow{\iota} CA \xrightarrow{\pi} A \to 0$

Satz 9.1 $\rightsquigarrow$

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d, equal] & \\
K_0(SA) \arrow[r] & K_0(CA) \arrow[r] & K_0(A) \\
K_1(A) \arrow[u, "\delta_1"] & K_1(CA) \arrow[l] \arrow[d, equal] & K_1(SA) \arrow[l] \\
 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Setze $\Theta_A := \delta_1$; Rest Übung. $\square$

9.3 <u>Def./Prop.:</u> Für $n \geq 2$ definieren wir induktiv

$$K_n(.) := K_{n-1}(S.).$$

Dann ist für jedes $n \in \mathbb{N}$ $K_n(.)$ ein halbexakter Funktor: $(C^*\text{-Alg}, {}^*\text{-Hom}) \to (\mathrm{Ab}, \mathrm{Hom})$.

Bew.: $S.$ ist ein exakter Funktor

$\rightsquigarrow$ $K_n(.)$ ist halbexakt falls $K_{n-1}(.)$ halbexakt ist, und die Aussage folgt mit Induktion. $\square$

9.4 Für $0 \to J \xrightarrow{\iota} A \xrightarrow{\pi} B \to 0$ $\overbrace{\text{und } n \geq 1}$ betrachte

$$0 \to S^nJ \xrightarrow{S^n\iota} S^nA \xrightarrow{S^n\pi} S^nB \to 0 \quad \text{mit Indexabbildung } K_1(S^nB) \xrightarrow{\bar{\delta}_1} K_0(S^nJ)$$

(aus Satz 9.1).

Satz 9.2
$$\rightsquigarrow \theta_{S^{n-1}J} : K_n(J) \overset{\text{Def. 9.3}}{=} K_1(S^{n-1}J) \xrightarrow{\cong} K_0(S^nJ)$$

$$\rightsquigarrow \begin{tikzcd} K_{n+1}(B) \arrow[r, dashed, "\exists!\, \delta_{n+1}"] \arrow[d, equal, "\text{Def. 9.3}"'] & K_n(J) \arrow[d, "\cong", "\theta_{S^{n-1}J}"'] \\ K_1(S^nB) \arrow[r, "\bar{\delta}_1"] & K_0(S^nJ) \end{tikzcd}$$

Die Indexabbildungen δ_n, $n \geq 1$, sind natürlich, (da die Abbildungen aus 9.1 und 9.2 sind natürlich).
Wir erhalten mit Satz 9.1 und Def. 9.3:

<u>Prop. 1</u> Eine kurze exakte Sequenz von C^*-Algebren

$$0 \to J \to A \to B \to 0$$

induziert eine lange exakte Sequenz von K-Gruppen

$$\cdots \to K_{n+1}(B) \xrightarrow{\delta_{n+1}} K_n(J) \to K_n(A) \to K_n(B) \xrightarrow{\delta_n} K_{n-1}(J) \to \cdots \to K_1(B) \xrightarrow{\delta_1} K_0(J) \xrightarrow{K_0(\iota)} K_0(A) \xrightarrow{K_0(\pi)} K_0(B).$$

$\square$

9.5 Sei $\mathcal{T}$ die Toeplitz Algebra, mit $\mathcal{T} = C^*(S) \subset \mathcal{B}(\ell^2(\mathbb{N}))$ und

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{K} \arrow[r] & \mathcal{T} \arrow[r] \arrow[dr, "\tau"] & C(S^1) \arrow[r] \arrow[d, "ev_1"] & 0 \\
 & & S \arrow[r, mapsto] & 1 \in \mathbb{C} &
\end{tikzcd}$$

und

$$0 \to \mathcal{T}_0 \to \mathcal{T} \underset{\sigma}{\overset{\tau}{\rightleftarrows}} \mathbb{C} \to 0.$$

<u>Satz</u> (Cuntz): Für jede unitale C^*-Algebra D ist

$$K_0(\tau \otimes id_D) : K_0(\mathcal{T} \otimes D) \to K_0(\mathbb{C} \otimes D) = K_0(D)$$

ein Isomorphismus. [Insbesondere gilt $K_0(\mathcal{T}) \cong K_0(\mathbb{C}) = \mathbb{Z}$.]

Bew.: Für $D = \mathbb{C}$, d.h. $K_0(\tau)$ ist ein Isomorphismus.
Für beliebiges D tensoriere mit D bzw. id_D. [$\mathcal{T}, \mathcal{K}\otimes\mathcal{T}$ sind nuklear]
Es gilt $K_0(\tau)K_0(\sigma) = K_0(id_{\mathbb{C}}) = id_{K_0(\mathbb{C})}$, wir müssen also $K_0(\sigma)K_0(\tau) = id_{K_0(\mathcal{T})}$ zeigen.
Sei $\varepsilon : \mathcal{T} \to \mathcal{K} \otimes \mathcal{T}$, $\varepsilon = e_{00} \otimes id_{\mathcal{T}}$,
dann ist $K_0(\varepsilon)$ ein Isomorphismus.

Setze $B := J \otimes 1_J + \mathcal{K} \otimes J$, dann ist $B \subset J \otimes J$ eine C^*-Unteralgebra und $\mathcal{K} \otimes J \triangleleft B$ ist ein Ideal.

Sei $\pi : B \to B/_{\mathcal{K} \otimes J}$ die Quotientenabbildung und

$\Theta : J \to B$, $\Theta(a) := a \otimes 1_J$ die Inklusion.

Betrachte den Pullback

$$\begin{array}{ccc} C & \longrightarrow & J \\ \downarrow & & \downarrow {\scriptstyle \pi \circ \Theta} \\ B & \xrightarrow[\pi]{} & B/_{\mathcal{K} \otimes J} \end{array}, \qquad \left[C = \{ (a,b) \in J \oplus B \mid \pi\Theta(a) = \pi(b) \} \right]$$

sowie die $*$-Homomorphismen

$$\gamma : \mathcal{K} \otimes J \rightarrowtail C$$
$$b \mapsto (0,b)$$

und

$$\rho : C \twoheadrightarrow J$$
$$(a,b) \mapsto a \; .$$

und

$$\kappa : J \to C$$
$$a \mapsto (a, a \otimes 1_J) \, .$$

$\leadsto 0 \to \mathcal{K} \otimes J \xrightarrow{\gamma} C \overset{\kappa}{\underset{\rho}{\rightleftarrows}} J \to 0$ spaltet exakt.

$\Rightarrow K_0(\gamma)$ ist injektiv

Setze $\lambda := \gamma\kappa : J \to C$, dann ist $K_0(\lambda) = K_0(\gamma)K_0(\kappa)$ injektiv und es genügt, $K_0(\lambda) = K_0([illegible])K_0(\pi)K_0([illegible])$ zu zeigen.

Setze $z_0 := S^2 S^{*2} \otimes 1 + e_{00} S^* \otimes S + S e_{00} \otimes S^* + e_{00} \otimes e_{00}$,

$z_1 := S^2 S^{*2} \otimes 1 + e_{00} S^* \otimes 1 + S e_{00} \otimes 1$,

$$z_0 = \left(\begin{array}{c|c|c|c} \begin{matrix} 1 & \\ & 0 \\ & & \ddots \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & \\ 1 & \ddots \\ & \ddots \end{matrix} & 0 & \\ \hline \begin{matrix} 0 & 1 \\ & \ddots & \ddots \end{matrix} & 0 & 0 & \\ \hline 0 & 0 & 1 & \\ \hline & & & \ddots \end{array}\right)$$

$$z_1 = \left(\begin{array}{c|c|c|c} 0 & 1 & 0 & \\ \hline 1 & 0 & 0 & \\ \hline 0 & 0 & 1 & \\ \hline & & & \ddots \end{array}\right)$$

Dann sind z_0, z_1 Symmetrien in $\mathcal{B}$ und

$z_t := -i\, e^{i\pi(1-t) z_0/2}\, e^{i\pi t z_1/2}$, $t \in [0,1)$

definiert eine Homotopie $z : [0,1] \to \mathcal{U}(\mathcal{B})$.

Es gilt $\pi(z_0) = \pi(z_1) = 1_{\mathcal{B}/\mathcal{K}\otimes\mathcal{T}}$ [warum?],

also auch $\pi(z_t) = 1_{\mathcal{B}/\mathcal{K}\otimes\mathcal{T}}$, $t \in [0,1]$ [warum?].

$\mathcal{T}$ ist die universelle von einer Isometrie erzeugte C*-Algebra

und daher $\varphi_t : \mathcal{T} \to C$, $t \in [0,1]$ definieren durch

$$\varphi_t(S) := \cancel{}\,(S,\ u_t(S \otimes 1_{\mathcal{T}}))$$

und $(\varphi_t)_{t\in[0,1]}$ ist eine Homotopie.

Ebenso existiert ein *-Hom. $\mu : \mathcal{T} \to \left\{ \begin{array}{l} (a,b) \in \\ \mathcal{T} \oplus \Theta((1-e_0)\mathcal{T}(1-e_0)) \\ \text{mit } \pi\Theta(a) = \pi(b) \end{array} \right\} \subset C$

mit $\mu(S) = (S,\ S^2 S^* \otimes 1)$. [$\mu(S)$ ist keine Isometrie in C, aber ...]

λ und μ haben orthogonale Bilder in C [warum?],

also auch ~~...~~ $\lambda \circ \sigma \circ \tau$ und μ.

Weiter gilt

$$\varphi_0 = \mu + \lambda, \quad \varphi_1 = \mu + \lambda \circ \sigma \circ \tau \quad [\text{warum?}].$$

$$\Rightarrow K_0(\mu) + K_0(\lambda) = K_0(\mu + \lambda) = K_0(\varphi_0) = K_0(\varphi_1) = K_0(\mu) + K_0(\lambda \circ \tau)$$

$$\Rightarrow K_0(\lambda) = K_0(\lambda \circ \tau)$$

□

9.6 Cor.: Für jede C^*-Algebra D gilt $K_0(\mathcal{T}_0 \otimes D) = K_1(\mathcal{T}_0 \otimes D) = 0$.

Beweis: Sei zunächst D unital.

$\rightsquigarrow 0 \to \mathcal{T}_0 \otimes D \to \mathcal{T} \otimes D \xrightarrow{\varepsilon \otimes id} \mathbb{C} \otimes D \to 0$ zerfällt

$\rightsquigarrow 0 \to K_0(\mathcal{T}_0 \otimes D) \to K_0(\mathcal{T} \otimes D) \xrightarrow{K_0(\varepsilon \otimes id)} K_0(\mathbb{C} \otimes D) \to 0$ ist exakt

$\overset{\text{Satz 9.5}}{\Rightarrow} K_0(\mathcal{T}_0 \otimes D) = 0$.

Für D nichtunital haben wir

$0 \to D \otimes \mathcal{T}_0 \to D^+ \otimes \mathcal{T}_0 \rightleftarrows \mathbb{C} \otimes \mathcal{T}_0 \to 0$

und

$0 \to K_0(D \otimes \mathcal{T}_0) \to \underbrace{K_0(D^+ \otimes \mathcal{T}_0)}_{=0} \to \underbrace{K_0(\mathbb{C} \otimes \mathcal{T}_0)}_{=0} \to 0$ exakt

$\Rightarrow K_0(D \otimes \mathcal{T}_0) = 0$.

Für K_1 benutzen $K_1(D \otimes \mathcal{T}_0) \overset{\text{Satz 9.2}}{\cong} K_0(C_0(0,1) \otimes D \otimes \mathcal{T}_0) = 0$. □

9.7 Wir haben $K \subset \mathcal{J}_0 \subset \mathcal{J}$ und $\pi(\mathcal{J}_0) \subset C_0((0,1))$,

wo $\mathcal{J} \xrightarrow{\pi} C(S^1) \cong \{f \in C([0,1]) \mid f(0)=f(1)\}$.

$\rightsquigarrow$ $0 \to K \to \mathcal{J}_0 \to C_0((0,1)) \to 0$ exakt

$\rightsquigarrow$ $0 \to K \otimes D \xrightarrow{\iota_D} \mathcal{J}_0 \otimes D \xrightarrow{\pi_D} SD \to 0$ für jede C^*-Algebra D

Satz 9.1
Cor 8.9
$\rightsquigarrow$ $\beta_D : K_1(SD) \xrightarrow{\delta_1} K_0(K \otimes D) \cong K_0(D)$

<u>Satz</u> (Bott Periodizität): Für jede C^*-Algebra D ist

$$\beta_D : K_1(SD) \to K_0(D)$$

ein natürlicher Isomorphismus.
Insbesondere ist $K_{n+2}(D) \cong K_n(D)$, $n \geq 0$.

Bew.: β_D natürlich: klar mit 9.1, 8.9.

Nach Prop. 9.4 ist

$$\underbrace{K_1(\mathcal{J}_0 \otimes D)}_{\overset{9.6}{=}0} \to K_1(SD) \xrightarrow{\delta_1} K_0(K \otimes D) \to \underbrace{K_0(\mathcal{J}_0 \otimes D)}_{\overset{9.6}{=}0}$$

exakt.

$\Rightarrow$ δ_1 ist Isomorphismus. □

9.8 Zu $0 \to J \xrightarrow{\iota} A \xrightarrow{\pi} B \to 0$ assoziieren wir die Exponentialabbildung

$$\delta_0 : K_0(B) \underset{9.7}{\xrightarrow{\beta_B^{-1}}} K_1(SB) \underset{9.3}{=} K_2(B) \underset{9.4}{\xrightarrow{\delta_2}} K_1(J).$$

Dann ist δ_0 natürlich (denn β_B und δ_1 sind natürlich) und

$$\begin{tikzcd} K_0(B) \arrow[r, "\delta_0"] \arrow[d, "\beta_B^{-1}"'] & K_1(J) \arrow[d, "\Theta_J"] \\ K_1(SB) \arrow[r, "\bar{\delta}_1", "9.1"'] & K_0(SJ) \end{tikzcd}$$

kommutiert (vgl. 9.4).

<u>Satz</u>: Die 6-Term Sequenz

$$\begin{tikzcd} K_0(J) \arrow[r, "K_0(\iota)"] & K_0(A) \arrow[r, "K_0(\pi)"] & K_0(B) \arrow[d, "\delta_0"] \\ K_1(B) \arrow[u, "\delta_1"] & K_1(A) \arrow[l, "K_1(\pi)"'] & K_1(J) \arrow[l, "K_1(\iota)"'] \end{tikzcd} \qquad (*)$$

ist exakt.

Bew.:

$$\begin{tikzcd} K_2(A) \arrow[r] \arrow[d, "\beta_A", "\cong"'] \arrow[r, phantom, "{[9.7]}", near start, shift right=6] & K_2(B) \arrow[r, "\delta_2"] \arrow[d, "\beta_B", "\cong"'] & K_1(J) \arrow[r] \arrow[d, equal, "{[9.4]}"'] & K_1(A) \arrow[d, equal] \\ K_0(A) \arrow[r] & K_0(B) \arrow[r, "\delta_0"] & K_1(J) \arrow[r] & K_1(A) \end{tikzcd} \qquad (**)$$

$K_2(A) \to K_2(B) \xrightarrow{\delta_2} K_1(J) \to K_1(A)$ ist exakt nach Prop. 9.4

kommutiert $\overset{\text{5-Lemma}}{\rightsquigarrow}$ (**) ist exakt bei $K_0(B)$ und $K_1(J)$

$\overset{9.1}{\Longrightarrow}$ (*) ist exakt. □

9.9 <u>Bem.</u>: Die Exponentialabbildung lässt sich explizit beschreiben:

Sei $x = [p]_0 - [s(p)]_0 \in K_0(B)$ für $p \in P_n(B^+)$.

Finde $h \in M_n(A^+)_{s.a.}$ mit $\pi^{+(n)}(h) = p$.

Dann ist $u := -e^{2\pi i h} \in \underline{U_n(J^+)}$ und $[\pi^{+(n)}(u) = -e^{2\pi i \pi^{+(n)}(h)} = -e^{2\pi i p} = 1]$

es gilt $\delta_0(x) = [u]_1 \in K_1(J)$. $\square$

9.10 <u>z.B.</u> 1(i) $K_0(C_0(\mathbb{R}^n)) \cong K_0(S^n\mathbb{C}) = K_n(\mathbb{C}) \cong \begin{cases} K_0(\mathbb{C}) \cong \mathbb{Z}, & n \text{ gerade} \\ K_1(\mathbb{C}) = 0, & n \text{ ungerade} \end{cases}$

$$K_1(C_0(\mathbb{R}^n)) \cong \begin{cases} 0, & n \text{ gerade} \\ \mathbb{Z}, & n \text{ ungerade}. \end{cases}$$

(ii) Sei $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ die n-Sphäre. $S^n = \mathbb{R}^{n+}$ (1-Punkt Kompaktifizierung)

$$\rightsquigarrow \quad 0 \to C_0(\mathbb{R}^n) \to C(S^n) \xrightarrow{ev_\infty} \mathbb{C} \to 0$$

$$\rightsquigarrow \quad \begin{array}{ccccccc} 0 \to & K_0(C_0(\mathbb{R}^n)) & \to & K_0(C(S^n)) & \to & K_0(\mathbb{C}) & \to 0 \\ & \cong\begin{cases}\mathbb{Z}\\0\end{cases} & & \cong\begin{cases}\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z} & n \text{ gerade}\\ \mathbb{Z} & n \text{ ungerade}\end{cases} & & \cong \mathbb{Z} & \\ & 0\uparrow & & & & \downarrow 0 & \\ 0 \leftarrow & K_1(\mathbb{C}) & \leftarrow & K_1(C(S^n)) & \leftarrow & K_1(C_0(\mathbb{R}^n)) & \leftarrow 0 \\ & = 0 & & \cong\begin{cases}0 & n \text{ gerade}\\ \mathbb{Z} & n \text{ ungerade}\end{cases} & & \cong\begin{cases}0\\ \mathbb{Z}\end{cases} & \end{array}$$

(iii) $0 \to SA \to C(\mathbb{T}, A) \rightleftarrows A \to 0$

$\Rightarrow K_0(C(\mathbb{T}, A)) \cong K_1(C(\mathbb{T}, A)) \cong K_0(A) \oplus K_1(A)$

(iv) $C(\mathbb{T}^2) \cong C(\mathbb{T}, C(\mathbb{T}))$

$\rightsquigarrow K_0(C(\mathbb{T}^2)) \cong K_1(C(\mathbb{T}^2)) \cong \mathbb{Z}^2$

allg.: $K_0(C(\mathbb{T}^n)) \cong K_1(C(\mathbb{T}^n)) \cong \mathbb{Z}^{2^{n-1}}$

(v) $0 \to \mathcal{T}_0 \to \mathcal{T} \to \mathbb{C} \to 0$

$\rightsquigarrow K_0(\mathcal{T}) \cong \mathbb{Z}, \quad K_1(\mathcal{T}) = 0.$

(vi) $D_n := \{ f \in C_0([0,1], M_n) \mid f(1) \in \mathbb{C} \cdot 1_n \}$

$\rightsquigarrow 0 \to SM_n \to D_n \xrightarrow{\pi} \mathbb{C} \to 0$

$$\begin{array}{ccccc}
 & & & & \mathbb{Z} \ni 1 \\
0 & & & & \cong \quad \downarrow \\
\parallel & & & & \\
K_0(SM_n) & \to & K_0(D_n) & \to & K_0(\mathbb{C}) \ni [1_{\mathbb{C}}]_0 \\
\uparrow & & & & \downarrow \delta_0 \leftarrow ? \\
K_1(\mathbb{C}) & \leftarrow & K_1(D_n) & \leftarrow & K_1(SM_n) \ni [(t \mapsto e^{2\pi i t} \cdot e_{11} + (1_n - e_{11}))]_1 \\
\parallel & & & & \cong \quad \updownarrow \\
0 & & & & \mathbb{Z} \ni 1
\end{array}$$

$h := \mathrm{id}_{[0,1]} \otimes 1_n \in D_n$, damit gilt $\pi(h) = 1_{\mathbb{C}} \rightsquigarrow \delta_0([1_{\mathbb{C}}]) = [e^{2\pi i h}]_1$
$= [(t) \mapsto e^{2\pi i t} \cdot 1_n)]_1$
$= n \cdot [(t \mapsto e^{2\pi i t} \cdot e_{11} + (1_n - e_{11}))]_1$

$\rightsquigarrow \delta_0(\ell) = n \cdot (.)$
$\Rightarrow K_0(D_n) = 0, \quad K_1(D_n) \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}.$

9.11 <u>Fragen:</u> Wieviel Information enthält $K_0(\,.\,)$?

$K_0(A_\theta) = ?$

$K_0(\mathcal{O}_n) = ?$

lassen sich θ bzw. n ablesen?

$K_0(A \rtimes G) = ?$

$K_0(C^*_{(r)}(G)) = ?$