9. Die 6-Term Sequenz

9.1 Satz: Sei $0 \to J \xrightarrow{\iota} A \xrightarrow{\pi} B \to 0$ eine kurze exakte Sequenz von C^*-Algebren.
Dann existiert ein Homomorphismus δ_1 so dass

$$\begin{tikzcd}
K_0(J) \arrow[r, "K_0(\iota)"] & K_0(A) \arrow[r, "K_0(\pi)"] & K_0(B) \\
K_1(B) \arrow[u, "\delta_1"] & K_1(A) \arrow[l, "K_1(\pi)"'] & K_1(J) \arrow[l, "K_1(\iota)"']
\end{tikzcd} \qquad (*)$$

exakt ist.

Für $u \in \mathcal{U}_n(B^+)$ ist $\delta_1([u]_1) = [p]_0 - [s_J(p)]_0$ für $p \in \mathcal{P}_{2n}(J^+)$ mit $\iota^{+(2n)}(p) = v\begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}v^*$ und $v \in \mathcal{U}_{2n}(A^+)$ mit $\pi^{+(2n)}(v) = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u^* \end{pmatrix}$.

δ_1 ist natürlich, d.h.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & J \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{III}"] & A \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{III}"] & B \arrow[r] \arrow[d, "\beta"] & 0 \\
0 \arrow[r] & J' \arrow[r] & A' \arrow[r] & B' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{tikzcd}
K_1(B) \arrow[r, "\delta_1"] \arrow[d, "K_1(\beta)"'] & K_0(J) \arrow[d, "K_0(\gamma)"] \\
K_1(B') \arrow[r, "\delta_1"] & K_0(J')
\end{tikzcd}$$

kommutiert.

Bew. (Idee): $\begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u^* \end{pmatrix} \sim_h 1_{2n}$ in $\mathcal{U}_{2n}(\mathcal{B}^+)$

$$\begin{aligned} &= e^{ih_1} \cdots e^{ih_k} \\ &\overset{[\pi \text{ surjektiv}]}{=} e^{i\pi^{+(2n)}(a_1)} \cdots e^{i\pi^{+(2n)}(a_k)} \end{aligned}$$

$\rightsquigarrow$ $v = e^{ia_1} \cdots e^{ia_k} \in \mathcal{U}_{2n}(A^+)$ erfüllt $\pi^{+(2n)}(v) = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u^* \end{pmatrix}$

[vgl. Prop. 7.7]

und es gilt $\pi^{+(2n)}\left(v \begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} v^*\right) = \begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{P}_{2n}(\mathcal{B}^+)$.

$\overset{\text{wie in Prop. 7.8}}{\rightsquigarrow}$ $\exists\, p \in \mathcal{P}_{2n}(J^+)$: $\iota^{+(2n)}(p) = v \begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} v^*$, $s_J(p) = \begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Überprüfe: $\delta_1([u]_1) = [p]_0 - [s_J(p)]_0$ ist wohldefiniert, und (*) ist exakt und natürlich. $\square$

9.2 Wir schreiben SA für die Einhängung

$$SA := C_0((0,1)) \otimes A$$

und $S^n A := S\,S^{n-1}A$.

Wissen aus Kapitel 2: $S.$ ist ein exakter Funktor.

[$C_0((0,1)) \otimes \_$ ist exakt nach Prop. 2.4;
$C_0((0,1))$ ist nuklear nach Satz 1.21.]

<u>Satz</u> Sei A ein C^*-Algebra. Dann gibt es einen natürlichen Isomorphismus

$$\Theta_A : K_1(A) \to K_0(SA).$$

Für $u \in \mathcal{U}_n(A^+)$ mit $s_A(u) = 1_n$ (vgl. Bem. 8.4(ii)) ist $\Theta_A([u]_1) = [p]_0 - [s_{SA}(p)]_0$ für $p \in P_{2n}((SA)^+)$ mit $p = v\begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}v^*$, $s_{SA}(p) = \begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,

$v \in \mathcal{U}_{2n}(C([0,1], A^+))$, $v(0) = 1_{2n}$, $v(1) = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u^* \end{pmatrix}$

und $s_A(v(t)) = 1_{2n}$, $t \in [0,1]$.

Bew.: Betrachte $0 \to SA \xrightarrow{\iota} CA \xrightarrow{\pi} A \to 0$

Satz 9.1 $\rightsquigarrow$

$$\begin{tikzcd}
 & 0 & \\
K_0(SA) \arrow[r] & K_0(CA) \arrow[r] \arrow[u, equal] & K_0(A) \\
K_1(A) \arrow[u, "\delta_1"] & K_1(CA) \arrow[l] \arrow[d, equal] & K_1(SA) \arrow[l] \\
 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Setze $\Theta_A := \delta_1$; Rest Übung. □

9.3 <u>Def./Prop.:</u> Für $n \geq 2$ definieren wir induktiv

$$K_n(\,.\,) := K_{n-1}(S\,.\,).$$

Dann ist für jedes $n \in \mathbb{N}$ $K_n(\,.\,)$ ein halbexakter Funktor $(C^*\text{-Alg}, *\text{-Hom}) \to (\mathrm{Ab}, \mathrm{Hom})$.

Bew.: $S.$ ist ein exakter Funktor

$\rightsquigarrow$ $K_n(\,.\,)$ ist halbexakt falls $K_{n-1}(\,.\,)$ halbexakt ist, und die Aussage folgt mit Induktion. □

9.4 Für $0 \to J \xrightarrow{\iota} A \xrightarrow{\pi} B \to 0$ betrachte $\underbrace{}_{\text{für } n \geq 1}$

$$0 \to S^nJ \xrightarrow{S^n\iota} S^nA \xrightarrow{S^n\pi} S^nB \to 0 \quad \text{mit Indexabbildung } K_1(S^nB) \xrightarrow{\bar{\delta}_1} K_0(S^nJ)$$

(aus Satz 9.1).

Satz 9.2
$$\Longrightarrow \theta_{S^{n-1}J} : K_n(J) \overset{\text{Def. 9.3}}{=} K_1(S^{n-1}J) \xrightarrow{\cong} K_0(S^nJ)$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{tikzcd} K_{n+1}(B) \arrow[r, dashed, "\exists!\,\delta_{n+1}"] \arrow[d, equal, "\text{Def. 9.3}"'] & K_n(J) \arrow[d, "\cong"', "\theta_{S^{n-1}J}"] \\ K_1(S^nB) \arrow[r, "\bar{\delta}_1"] & K_0(S^nJ) \end{tikzcd}$$

Die Indexabbildungen δ_n, $n \geq 1$, sind natürlich, (denn die Abbildungen aus 9.1 und 9.2 sind natürlich).
Wir erhalten mit Satz 9.1 und Def. 9.3:

Prop.: Eine kurze exakte Sequenz von C^*-Algebren

$$0 \to J \to A \to B \to 0$$

induziert eine lange exakte Sequenz von K-Gruppen

$$\dots \to K_{n+1}(B) \xrightarrow{\delta_{n+1}} K_n(J) \to K_n(A) \to K_n(B) \xrightarrow{\delta_n} K_{n-1}(J) \to \dots \to K_1(B) \xrightarrow{\delta_1} K_0(J) \xrightarrow{K_0(\iota)} K_0(A) \xrightarrow{K_0(\pi)} K_0(B).$$

$\square$