8. Der Funktor $K_1(\cdot)$

8.1 Def./Prop.: Für eine unitale C^*-Algebra A setzen wir $U_n(A) := U(M_n(A))$, $U_\infty(A) := \bigsqcup_{n=1}^{\infty} U_n(A)$.

Für $u, v \in U_\infty(A)$ $(u \in U_n(A),\ v \in U_m(A))$ setzen wir $u \oplus v := \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix} \in U_{n+m}(A) \subset U_\infty(A)$.

Für u, v wie oben definieren wir

$$u \sim_1 v :\Leftrightarrow \exists k \geq \max\{m,n\} : u \oplus 1_{k-n} \sim_h v \oplus 1_{k-m} \text{ in } U_k(A).$$

Dann ist $\sim_1$ eine Äquivalenzrelation auf $U_\infty(A)$ und es gilt

- $u \sim_1 u \oplus 1_l$, $u \in U_\infty(A)$, $l \in \mathbb{N}$
- $u \oplus v \sim_1 v \oplus u$, $u, v \in U_\infty(A)$
- $u \sim_1 u'$, $v \sim v'$ $\Rightarrow$ $u \oplus v \sim_1 u' \oplus v'$
- $uv \sim_1 vu \sim_1 u \oplus v$
- $(u \oplus v) \oplus w = u \oplus (v \oplus w)$.

Bew.: Benutze $\begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix} \sim_h \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} uv & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. □

8.2 Def./Prop.: Für eine C^*-Algebra A definieren wir

$$K_1(A) := \mathcal{U}_\infty(A^+)/_{\sim_1}$$

und schreiben $[u]_1$ für die Äquivalenzklasse von u.

$K_1(A)$ ist eine abelsche Gruppe mit

$$[u]_1 + [v]_1 = [u \oplus v]_1 \quad \left[= [uv]_1 = [vu]_1\right] \text{ falls } u,v \in \mathcal{U}_n(A)$$

$$-[u]_1 = [u^*]_1$$

$$0_{K_1(A)} = [1]_1 .$$

8.3 Prop.: Sei A eine C^*-Algebra, G eine abelsche Gruppe und sei $\nu : \mathcal{U}_\infty(A^+) \to G$ eine Abbildung mit

a) $\nu(u \oplus v) = \nu(u) + \nu(v)$

b) $\nu(1) = 0$

c) $u, v \in \mathcal{U}_n(A),\ u \sim_h v \Rightarrow \nu(u) = \nu(v)$.

Dann existiert genau ein $\alpha : K_1(A) \to G$ so dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{U}_\infty(A^+) \arrow[d, "{[\cdot]_1}"'] \arrow[dr, "\nu"] & \\
K_1(A) \arrow[r, dashed, "\exists! \alpha"'] & G
\end{tikzcd}$$

$\square$

8.4 Bem.: (i) Es gilt $K_1(A) := \{[u]_1 \in U_n(A^+) \mid \pi^{+(n)}(u) = 1_n\}$

(ii) Falls A unital ist, so gilt $K_1(A) \cong U_\infty(A)/\sim_1$.

Bew.: Übg.

8.5 Seien A, B C^*-Algebren und $\varphi: A \to B$ ein *-Hom.

$\rightsquigarrow \varphi^{+(\infty)}: U_\infty(A^+) \to U_\infty(B^+)$.

Man überprüft, dass $\nu: U_\infty(A^+) \to K_1(B)$
$$u \mapsto [\varphi^{+(\infty)}(u)]_1$$
die Bedingungen a), b), c) aus Prop. 8.3 erfüllt.

$\rightsquigarrow K_1(\varphi): K_1(A) \to K_1(B)$.

Wir erhalten:

Prop.: Seien A, B, C C^*-Algebren, $\varphi: A \to B$, $\psi: B \to C$ *-Hom.
Dann gilt

(i) $K_1(\mathrm{id}_A) = \mathrm{id}_{K_1(A)}$

(ii) $K_1(\psi \circ \varphi) = K_1(\psi) \circ K_1(\varphi)$.

Insbesondere ist $K_1(\cdot)$ ein kovarianter Funktor
$(C^*\text{-Alg}, {}^*\text{-Hom}) \to (\mathrm{Ab}, \mathrm{Hom})$.

(iii) $K_1(\{0\}) = \{0\}$

(iv) $K_1(0_{A\to B}) = 0_{K_1(A)\to K_1(B)}$

(v) $\varphi_0 \sim_h \varphi_1 : A \to B \Rightarrow K_1(\varphi_0) = K_1(\varphi_1)$

(vi) Falls A und B homotopieäquivalent via $A \xrightarrow{\rho} B \xrightarrow{\sigma} A$ sind, so sind $K_1(\rho)$ und $K_1(\sigma)$ zueinander inverse Isomorphismen.

(vii) Falls $x \in \ker(K_1(\varphi))$, so existiert $u \in U_m(A^+)$ mit $x = [u]_1$ und $\varphi^{+(m)}(u) \sim_h 1$.
Falls φ surjektiv ist, so kann man $\varphi^{+(m)}(u) = 1$ arrangieren.

Beweis: (i) - (vi): Im Wesentlichen wie für K_0; klar mit
$$(\psi\circ\varphi)^{+(m)} = \psi^{+(m)}\circ\varphi^{+(m)} \text{ und } (\varphi_0 \sim_h \varphi_1 \Rightarrow \varphi_0^{+(m)} \sim_h \varphi_1^{+(m)}).$$

(vii): $x = [u]_1$ mit $u \in U_m(A^+)$ und $\varphi^{+(m)}(u) \sim_1 1_m$
$$\overset{\text{Def. 8.1}}{\Rightarrow} \underbrace{\varphi^{+(m)}(u) \oplus 1_k}_{= \varphi^{+(m+k)}(u \oplus 1_k)} \sim_h 1_{m+k}$$

Ersetze man u durch $u \oplus 1_k$.

φ surjektiv, muss $\varphi^{+(m)}(u) = e^{ih_1}\cdots e^{ih_n}$ und es gibt
$$1_m \sim_h v \in U_m(A^+) : \varphi^{+(m)}(v) = \varphi^{+(m)}(u).$$

Ersetze man u durch uv^*, dann gilt $[uv^*]_1 = [u]_1 = x$ und $\varphi^{+(m)}(uv^*) = 1_m$. □

8.6 Prop.: $K_1(\cdot)$ ist halbexakt, d.h. eine kurze exakte Sequenz

$$0 \to J \xrightarrow{\iota} A \xrightarrow{\pi} B \to 0$$ von C^*-Algebren induziert

eine exakte Sequenz

$$K_1(J) \xrightarrow{K_1(\iota)} K_1(A) \xrightarrow{K_1(\pi)} K_1(B)$$

von abelschen Gruppen.

Bew.: $\mathrm{im}(K_1(\iota)) \subset \ker(K_1(\pi))$ ist klar mit $\pi\iota = 0_{J\to B}$ und 8.5(iii),(iv).

Sei nun $x \in \ker(K_1(\pi))$.

$\Rightarrow$ [8.5(viii)] $x = [u]_1$ für ein $u \in U_n(A^+)$ mit $\pi^{+(n)}(u) = 1_n$.

$\Rightarrow \pi^{+(n)}(u - 1_n) = 0 \Rightarrow u - 1_n \in \iota^{+(n)}(J)$

$\overset{\iota^{+(n)} \text{ injektiv}}{\leadsto} v \in U_n(J) : \iota^{+(n)}(v) = u$.

$\Rightarrow K_1(\iota)(v) = [u]_1 = x$

$\Rightarrow x \in \mathrm{im}(K_1(\iota))$. □

Im Wesentlichen wie für K_0 zeigt man:

8.7 Prop.: $K_1(\cdot)$ ist split exakt, d.h.

$$0 \to J \to A \leftrightarrows B \to 0$$ exakt und zerfallend

induziert

$$0 \to K_1(J) \to K_1(A) \leftrightarrows K_1(B) \to 0$$ exakt und zerfallend.

Insbesondere gilt für C^*-Algebren A, B

$$K_1(A \oplus B) \cong K_1(A) \oplus K_1(B).$$ □

8.8 **Prop.:** $K_1(\cdot)$ ist stetig, d.h. $K_1(\varinjlim A_i) \cong \varinjlim K_1(A_i)$.

Bew.: Wie für K_0, mit Blatt 11, Aufgabe 1 an Stelle von Lemma 7.12. □

8.9 **Cor.:** Die Abbildungen $e_{11} \otimes \mathrm{id}_A$ induzieren Isomorphismen

$$K_1(A) \cong K_1(M_n(A)) \text{ und } K_1(A) \cong K_1(\mathbb{K} \otimes A).$$

Bew.: Wie für K_0. □