Operatoralgebren II

1. Tensorprodukte

1.1 <u>Erinnerung</u>: Seien V, W K-Vektorräume.
Sei X ein weiterer K-Vektorraum und
$\varphi: V \times W \to X$ bilinear.
Dann heißt (X, φ) Tensorprodukt von V und W,
falls folgende universelle Eigenschaft gilt:

$$\begin{tikzcd} V \times W \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "\text{bil.}"'] & X \arrow[d, dotted, "\exists!\, \psi \text{ lin.}"] \\ & U \end{tikzcd}$$

1.2 <u>Prop./Def.</u>: (X, φ) wie oben existiert und ist eindeutig
bis auf lin. Isom.
Wir schreiben $V \otimes W$ für X und $v \otimes w$ für $\varphi(v, w)$.

Bew.: $M :=$ freier VR mit Basis $V \times W$
(bzw. $M := \{f: V \times W \to K \mid \operatorname{supp} f \text{ endlich}\}$),
$N := \operatorname{span}\{(v_1 + v_2, w) - ((v_1, w) + (v_2, w)), (v, w_1 + w_2) - ((v, w_1) + (v, w_2)),$
$(\lambda \cdot v, w) - \lambda \cdot (v, w), (v, \lambda \cdot w) - \lambda \cdot (v, w) \mid \lambda \in K, v_1, v_2, v \in V, w_1, w_2, w \in W\}$.
Setze $X := M/N$ und $\varphi((v, w)) := (v, w) + N$.
Rest Übg. □

1.3 <u>Prop.:</u> Seien A, B K-Algebren, dann ist $A \otimes B$ K-Algebra mit $(a\otimes b)(a'\otimes b') = aa' \otimes bb'$.

A, B *-Algebren, dann ist $A \otimes B$ *-Algebra mit $(a\otimes b)^* = a^* \otimes b^*$.

A, B kommutativ / unital, so auch $A \otimes B$.

Bew.: Betrachte M wie in 1.2 und überprüfe, dass Multiplikation auf M/N wohldefiniert und assoziativ ist.

Alternativ:

$$(a,b) \in A \times B \rightsquigarrow M_{(a,b)} : A \times B \to A \otimes B \text{ bilinear}$$
$$(a',b') \mapsto aa' \otimes bb'$$

$$\overset{\text{u.E.}}{\rightsquigarrow} m_{(a,b)} : A \otimes B \to A \otimes B \text{ linear}$$
$$m_{(a,b)}(a' \otimes b') = aa' \otimes bb'$$

$$\rightsquigarrow m : A \times B \to L(A \otimes B, A \otimes B) \text{ bilinear}$$
$$(a,b) \mapsto m_{(a,b)}$$

$$\rightsquigarrow A \otimes B \to \underline{L}(A \otimes B, A \otimes B) \text{ linear}$$

$$\rightsquigarrow \mu : A \otimes B \times A \otimes B \to A \otimes B \text{ bilinear}$$

und $(A \otimes B, \mu)$ ist K-Algebra.

Rest ist klar. $\square$

1.4 **Bem.:** (i) A, B *-Algebren, dann hat $A \odot B$ als *-Algebra die folgende universelle Eigenschaft: Falls C eine *-Algebra ist und $\pi_A : A \to C$, $\pi_B : B \to C$ *-Homomorphismen mit $[\pi_A(A), \pi_B(B)] = 0$, so existiert genau ein *-Hom. $\pi : A \odot B \to C$ mit $\pi(a \otimes b) = \pi_A(a)\pi_B(b)$.

(ii) A, B, C, D *-Algebren, $\pi_A : A \to C$, $\pi_B : B \to D$ *-Hom.
$\Rightarrow \exists!$ *-Hom. $\pi_A \odot \pi_B : A \odot B \to C \odot D$ mit $\pi_A \odot \pi_B (a \otimes b) = \pi_A(a) \otimes \pi_B(b)$.

1.5 **Prop./Def.:** $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ HR, dann ist $\mathcal{H}_1 \odot \mathcal{H}_2$ Prä-HR mit

$$\langle \xi \otimes \eta, \xi' \otimes \eta' \rangle := \langle \xi, \xi' \rangle \cdot \langle \eta, \eta' \rangle .$$

$\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 := \overline{\mathcal{H}_1 \odot \mathcal{H}_2}^{\langle \cdot, \cdot \rangle}$ ist das HR-Tensorprodukt.

Bew.: $\xi \in \mathcal{H}_1, \eta \in \mathcal{H}_2 \overset{u.E.}{\rightsquigarrow} \exists! \ \tau_{\xi \otimes \eta} : \mathcal{H}_1 \odot \mathcal{H}_2 \to \mathbb{C}$ linear mit $\tau_{\xi\otimes\eta}(\xi' \otimes \eta') = \langle \xi, \xi' \rangle \cdot \langle \eta, \eta' \rangle$.

$(\xi, \eta) \mapsto \overline{\tau_{\xi \otimes \eta}}$ bilinear $\rightsquigarrow \xi \otimes \eta \mapsto \tau_{\xi\otimes\eta}$ antilinear
$\rightsquigarrow \langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{H}_1 \odot \mathcal{H}_2 \times \mathcal{H}_1 \odot \mathcal{H}_2 \to \mathbb{C}$ sesquilinear.

pos. def.: Sei $z = \sum_{i=1}^m \xi_i \otimes \eta_i \in \mathcal{H}_1 \odot \mathcal{H}_2$; wähle ONB $\{\delta_1, \dots, \delta_m\}$ für $\operatorname{span}\{\eta_i\}$, dann ist $z = \sum_{i=1}^m \xi_i' \otimes \delta_i$ für $\xi_i' \in \mathcal{H}_1$ geeignet und
$\langle z, z \rangle = \sum_{i=1}^m \|\xi_i'\|^2 \geq 0$; $\langle z, z \rangle = 0 \iff \xi_i' = 0, \ i = 1, \dots, m$. $\square$

1.6 Bem.: $\mathcal{B}(\mathcal{H}_1) \odot \mathcal{B}(\mathcal{H}_2) \overset{\iota}{\hookrightarrow} \mathcal{B}(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2)$ (warum?)

mit $(a \otimes b)(\xi \otimes \eta) = a(\xi) \otimes b(\eta)$

(Diese Abb. ist i.a. nicht surjektiv.)

1.7 Frage: A, B C^*-Algebren. Welche C^*-Normen ex. auf $A \odot B$?

1.8 Bem.: Falls $\gamma : A \odot B \to \mathbb{R}^+$ eine C^*-Norm ist, so ist $A \otimes_\gamma B := \overline{A \odot B}^{\gamma}$ eine C^*-Algebra.

1.9 Prop.: Seien A, B C^*-Algebren.

(i) Für *-Darstellungen $\pi_A : A \to \mathcal{B}(\mathcal{H}_1)$, $\pi_B : B \to \mathcal{B}(\mathcal{H}_2)$ def. $(\pi_A \otimes \pi_B)(a \otimes b) := \iota(\pi_A(a) \otimes \pi_B(b))$ eine *-Darst. $\pi_A \otimes \pi_B : A \odot B \to \mathcal{B}(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2)$.

Falls π_A und π_B treu sind, so auch $\pi_A \otimes \pi_B$.

(ii) Die Abb. $\|\cdot\|_{min} : A \odot B \to \mathbb{R}^+$, geg. durch

$$\left\|\sum_{i=1}^n a_i \otimes b_i\right\|_{min} := \sup\left\{ \left\|(\pi_A \otimes \pi_B)\left(\sum_{i=1}^n a_i \otimes b_i\right)\right\| \;\middle|\; \pi_A, \pi_B \text{ } ^*\text{-Darst.} \right\}$$

ist eine C^*-Norm.

Bew. (i) $\left.\begin{array}{l}\text{Bem. } 1.4\,(ii)\\ +\,\text{Bem. } 1.6\end{array}\right\} \Rightarrow \exists!$ *-Darst. $\pi_A \otimes \pi_B = \underbrace{\iota \circ (\pi_A \odot \pi_B)}_{\substack{\text{injektiv} \quad \exists! \\ \Rightarrow \exists!}}$

Seien π_A, π_B treu, $0 \neq c \in \ker(\pi_A \otimes \pi_B)$.

Es gilt $c = \sum_{i=1}^n a_i \otimes b_i$ für geeignete a_i, b_i, n; o.E. b_i lin. unabh.

π_B treu $\Rightarrow \pi_B(b_i)$ lin. unabh.

Für $\xi \in \mathcal{H}_1$ wähle ONB $\{\xi_1, \dots, \xi_m\}$ für $\operatorname{span}\{\pi_A(a_i)\xi\} \subset \mathcal{H}_1$.

Dann ex. $\lambda_{ij} \in \mathbb{C}$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$, mit

$$\pi_A(a_i)\xi = \sum_{j=1}^m \lambda_{ij}\xi_j, \quad i = 1, \dots, n.$$

Für $\eta \in \mathcal{H}_2$ gilt

$$0 = \pi_A \otimes \pi_B(c)(\xi \otimes \eta) = \sum_{i=1}^n \pi_A(a_i)\xi \otimes \pi_B(b_i)\eta$$
$$= \sum_{j=1}^m \Big(\xi_j \otimes \sum_{i=1}^n \lambda_{ij} \cdot \pi_B(b_i)\eta\Big)$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n \lambda_{ij} \cdot \pi_B(b_i)\eta = 0, \quad j = 1, \dots, m, \ \eta \in \mathcal{H}_2$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n \lambda_{ij} \cdot \pi_B(b_i) = 0, \quad j = 1, \dots, m$$

$$\overset{\pi_B(b_i)\text{ l.u.}}{\Rightarrow} \quad \lambda_{ij} = 0, \quad i = 1, \dots, n, \ j = 1, \dots, m$$

$$\Rightarrow \pi_A(a_i)\xi = 0, \quad i = 1, \dots, n, \ \xi \in \mathcal{H}_1$$

$$\overset{\pi_A\text{ treu}}{\Rightarrow} \quad a_i = 0, \ i = 1, \dots, n \quad \Rightarrow \quad c = 0 \ \lightning$$

(ii) $\|.\|_{min}$ ist C^*-Halbnorm ✓ (*) (warum?)

$\|.\|_{min}$ ist Norm nach (i), denn A und B haben treue Darstellgn. □

(*) $\|.\|_{min}$ endlich: $\|(\pi_A \otimes \pi_B)(\sum_{i=1}^n a_i \otimes b_i)\| = \|\sum_{i=1}^n (\pi_A(a_i) \otimes 1_{\mathcal{H}_2})\, 1_{\mathcal{H}_1} \otimes \pi_B(b_i)\| \leq \sum_{i=1}^n \|a_i\|\|b_i\| < \infty$

1.10 Def.: $A \otimes_{min} B := \overline{A \odot B}^{\|\cdot\|_{min}}$ heißt minimales (auch räumliches oder spatiales) Tensorprodukt von A u. B.

1.11 Satz: Seien A, B C^*-Algebren, $\pi : A \odot B \to B(\mathcal{H})$ nichtdeg. *-Darstg.
Dann ex. eind. best. nichtdeg. *-Darstgn.
$\pi_A : A \to B(\mathcal{H})$ und $\pi_B : B \to B(\mathcal{H})$ mit
$\pi(a \otimes b) = \pi_A(a)\pi_B(b) = \pi_B(b)\pi_A(a)$, $a \in A$, $b \in B$.
Falls π eine Faktordarstg. ist (d.h. $\pi(A \odot B)$ ist Faktor), so auch π_A und π_B.

Bew.: Falls A, B unital sind, so sind π_A, π_B gegeben durch
$\pi_A(a) = \pi(a \otimes 1_B)$, $\pi_B(b) = \pi(1_A \otimes b)$.
Im allgemeinen Fall seien $(h_\lambda), (k_\mu)$ appr. Einsen für A bzw. B; setze $\pi_A(a) := \text{s.o.-}\lim_\mu \pi(a \otimes k_\mu)$, $\pi_B(b) := \text{s.o.-}\lim \pi(h_\lambda \otimes b)$.
$\pi_A(a)$ und $\pi_B(b)$ ex.:
Für $\xi \in \mathcal{H}$, $a \in A_+$ definiert $b \mapsto \langle \xi, \pi(a \otimes b)\xi \rangle$ ein pos. lin. Fkt. f_a auf B (beschränkt nach [?] I, [?])
$\Rightarrow \lim_\mu \langle \xi, \pi(a \otimes k_\mu)\xi \rangle = \lim_\mu f_a(k_\mu)$ existiert für jedes $a \in A_+$.
Für $a \in A_+$, $\mu \le \mu'$ gilt
$\|(\pi(a \otimes k_{\mu'}) - \pi(a \otimes k_\mu))\xi\|^2 = \langle \xi, \pi(a^2 \otimes (k_{\mu'} - k_\mu)^2)\xi \rangle$
$\le \langle \xi, \pi(a \otimes (k_{\mu'} - k_\mu))\xi \rangle = f_a(k_{\mu'}) - f_a(k_\mu) < \varepsilon$ falls μ, μ' groß
$\Rightarrow \pi_A(a)$ existiert, ebenso $\pi_B(b)$.

π_A, π_B *-Darstellg. mit richtigen Eigenschaften i Übg.

Es gilt $\pi_A(A) \subset \pi_B(B)'$

$$\begin{array}{ccc} \pi_A(A) & \subset & \pi_B(B)' \\ \cap & & \| \text{ Bikommutantensatz} \\ \pi_A(A)'' & \subset & \pi_B(B)''' \end{array}$$

$\Rightarrow \pi_A(A)' \cap \pi_A(A)'' \subset \pi_A(A)' \cap \pi_B(B)' \subset \pi(A \odot B)'$.

Es gilt $\pi_A(A) \subset \overline{\pi(A \odot B)}^{\text{s.o.}} = \pi(A \odot B)''$

$\Rightarrow \pi_A(A)'' \subset \pi(A \odot B)''$

$\Rightarrow \pi_A(A)' \cap \pi_A(A)'' \subset \pi(A \odot B)' \cap \pi(A \odot B)'' \underset{\pi \text{ Faktordarstellg.}}{=} \mathbb{C} \cdot 1_H$. $\square$

1.12 <u>Cor.:</u> Seien A, B C*-Algebren und γ eine C*-Halbnorm auf $A \odot B$.

Dann gilt $\gamma(a \otimes b) \leq \|a\| \|b\|$ für $a \in A, b \in B$ und γ besitzt eine eindeutige Fortsetzung zu einer C*-Halbnorm auf $A^\sim \odot B^\sim$.

Bew.: $N := \{ x \in A \odot B \mid \gamma(x) = 0 \} \triangleleft A \odot B$;

γ induziert eine C^*-Norm auf $A \odot B/_N$.

⇝ $C := \overline{A \odot B/_N}^{\bar{\gamma}}$ ist eine C^*-Algebra mit einer nichtdeg. treuen Darst.; wir erhalten

$\pi : A \odot B \to B(\mathcal{H})$ mit $\|\pi(x)\| = \bar{\gamma}(x+N) = \gamma(x)$, $x \in A \odot B$,

und $\gamma(a \otimes b) = \|\pi(a \otimes b)\| \overset{1.11}{=} \|\pi_A(a)\, \pi_B(b)\| \leq \|\pi_A(a)\| \|\pi_B(b)\| \leq \|a\| \|b\|$.

Seien $\tilde{\pi}_A$, $\tilde{\pi}_B$ Fortsetzungen auf $A^\sim$, $B^\sim$, dann ist def.

$\tilde{\pi}(a \otimes b) := \tilde{\pi}_A(a)\, \tilde{\pi}_B(b)$ eine Fortsetzung von π

auf $A^\sim \odot B^\sim$ ($\tilde{\pi}$ ex. nach Bem. 1.4(i)).

Dann ist $\tilde{\gamma}(x) := \|\tilde{\pi}(x)\|$ Fortsetzung von γ auf $A^\sim \odot B^\sim$.

Eindeutigkeit:

$$\tilde{\gamma}(x) = \|\tilde{\pi}(x)\| = \|1_{\mathcal{H}} \cdot \tilde{\pi}(x)\|$$

$$\underset{\pi \text{ nichtdeg.}}{=} \|\text{s.o.-}\lim \pi(\underbrace{h_\lambda^{\frac{1}{2}} \otimes k_\mu^{\frac{1}{2}}}_{\text{approx. Eins}})\, \tilde{\pi}(x)\|$$

$$= \lim_{\lambda,\mu} \|\tilde{\pi}(x^*)\, \pi(h_\lambda \otimes k_\mu)\, \tilde{\pi}(x)\|^{\frac{1}{2}}$$

[Warum?] $$= \lim_{\lambda,\mu} \|\pi(x^*(h_\lambda \otimes k_\mu)x)\|^{\frac{1}{2}}$$

$$= \lim_{\lambda,\mu} \gamma(x^*(h_\lambda \otimes k_\mu)x)^{\frac{1}{2}} \quad \leftarrow \text{unabhängig von } \pi$$

□

1.13 Prop.: Die Abbildung $\|\cdot\|_{max} : A \odot B \to \mathbb{R}^+$, geg. durch

$$\|x\|_{max} := \sup\{\|\pi(x)\| \mid \pi \text{ } ^*\text{-Darstg. von } A \odot B\}$$

ist eine C^*-Norm auf $A \odot B$.

Für jede weitere C^*-Norm γ gilt $\gamma(x) \leq \|x\|_{max}$, $x \in A \odot B$.

Bew.: $\|\cdot\|_{max}$ submultiplikativ $\Rightarrow$ $\|x\|_{max} < \infty$, $x \in A \odot B$.

$\|\cdot\|_{max}$ C^*-Halbnorm: ✓

Seien π_A, π_B treue Darstgn., dann ist $\pi_A \otimes \pi_B$ treu nach 1.9(i)

$\Rightarrow$ $\|\cdot\|_{max}$ ist C^*-Norm.

$\|\cdot\|_{max}$ maximal: ✓ $\square$

1.14 Def.: $A \otimes_{max} B := \overline{A \odot B}^{\|\cdot\|_{max}}$ heißt maximales Tensorprodukt von A und B.

1.15 Bem.: (i) γ C^*-Norm auf $A \odot B$ $\rightsquigarrow$ $A \otimes_{max} B \twoheadrightarrow A \otimes_\gamma B := \overline{A \odot B}^\gamma$.

($id : (A \odot B, \|\cdot\|_{max}) \to (A \odot B, \gamma)$ ist kontrahierender *-Hom., besitzt also Fortsetzung zu $A \otimes_{max} B \to A \otimes_\gamma B$; die Fortsetzung hat dichtes Bild, ist also surjektiv.)

(ii) A, B unital $\Rightarrow$ $A \otimes_\gamma B$ unital und $A, B \hookrightarrow A \otimes_\gamma B$
$a \mapsto a \otimes 1_B$
$b \mapsto 1_A \otimes b$.

(iii) A, B unital $\Rightarrow$ $A \otimes_{max} B \cong C^*(A, B \mid [A,B] = 0)$. [Übung]

(iv) $\otimes_{max}$ und $\otimes_{min}$ sind assoziativ und kommutativ. [warum?]

1.16 __Def.:__ Für C^*-Algebren A, B setzen wir

$(A \odot B)^* := \{ f : A \odot B \to \mathbb{C} \text{ lin.} \}$.

$f \in (A \odot B)^*$ heißt positiv, falls $f(x^*x) \geq 0$, $x \in A \odot B$;

wir setzen $\|f\| := \sup\{ |f(a \otimes b)| \mid a \in A_+^1, b \in B_+^1 \}$.

Wir definieren die Zustände auf $A \odot B$ durch

$S(A \odot B) := \{ f \in (A \odot B)^* \text{ positiv} \mid \|f\| = 1 \}$.

1.17 __Prop.:__ Jedes positive $f \in (A \odot B)^*$ hat eine positive Fortsetzung

$\tilde{f} \in (A^\sim \odot B^\sim)^*$ mit $\|f\| = \|\tilde{f}\| = \tilde{f}(1_{A^\sim} \otimes 1_{B^\sim}) < \infty$.

__Bew.:__ Sei $(h_\lambda)_\lambda \subset A$ appr. Eins.

Für $b \in B_+$ setze $f_b(a) := f(a \otimes b)$, dann ist $f_b \in A^*$ pos., also beschränkt

$\Rightarrow \tilde{f}(1_{A^\sim} \otimes b) := \lim_\lambda f(h_\lambda \otimes b) = \sup\{ f(h_\lambda \otimes b) \}$ existiert.

$\leadsto \hat{f} \in (A^\sim \odot B)^*$ mit $\hat{f}(x) = \lim_\lambda f((h_\lambda \otimes 1_{B^\sim})x) = \lim_\lambda f((h_\lambda^{\frac{1}{2}} \otimes 1_{B^\sim})x(h_\lambda^{\frac{1}{2}} \otimes 1_{B^\sim}))$, $x \in A^\sim \odot B$.

$\hat{f}$ ist linear, wohldef. und positiv.

Ebenso lässt sich $\hat{f}$ zu $\tilde{f} \in (A^\sim \odot B^\sim)^*$ fortsetzen.

Es gilt $\|f\| \leq \|\tilde{f}\|$ (trivial) und $\tilde{f}(a \otimes b) \leq \tilde{f}(1_{A^\sim} \otimes 1_{B^\sim})$, $a \in A_+^{\sim 1}$, $b \in B_+^{\sim 1}$,

so dass $\|\tilde{f}\| = \tilde{f}(1_{A^\sim} \otimes 1_{B^\sim})$.

Wähle $h \in A_+$, $g \in B_+$, $\|h\|, \|g\| \leq 1$, mit

$\tilde{f}(1_{A^\sim} \otimes 1_{B^\sim}) - \varepsilon < f(h \otimes g)$. $\Rightarrow \|\tilde{f}\| \leq \|f\|$. $\square$

1.18 Lemma: Seien A, B unitale C^*-Algebren und $x = x^* \in A \odot B$. Dann existieren $\lambda > 0$, $n \in \mathbb{N}$ und $z_1, \dots, z_n \in A \odot B$ mit $\lambda \cdot (1_A \otimes 1_B) - x = \sum_{i=1}^{n} z_i^* z_i$. Wir schreiben auch $\lambda \cdot (1_A \otimes 1_B) \geq_{alg} x$.

Bew.: Für $a \in A_+$, $b \in B_+$ gilt $0 \leq_{alg} a \otimes b \leq_{alg} \|a\| \cdot \|b\| \cdot (1_A \otimes 1_B)$, denn $a \otimes b = (a^{\frac{1}{2}} \otimes b^{\frac{1}{2}})^2$ und

$$a \otimes b + (\|a\| \cdot 1_A - a) \otimes b + \|a\| \cdot 1_A \otimes (\|b\| \cdot 1_B - b) = \|a\| \cdot \|b\| \cdot 1_A \otimes 1_B .$$

~~Weiter gilt $(A \odot B)_{s.a.} = A_{s.a.} \odot B_{s.a.}$ $(= \mathrm{span}\{c \otimes d \mid c \in A_{s.a.}, d \in B_{s.a.}\})$~~

Falls $y = y^* = \sum_{k=1}^{m} a_k \otimes b_k$, so gilt

$$y = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{m} (a_k + a_k^*) \otimes (b_k + b_k^*) - i(a_k - a_k^*) \otimes i(b_k - b_k^*).$$

Wir können daher $x = \sum_{k=1}^{n} c_k \otimes d_k$ mit $c_k = c_k^*$, $d_k = d_k^*$ schreiben, und es gilt

$$x \leq_{alg} \sum_{k=1}^{n} ((c_k)_+ + (c_k)_-) \otimes ((d_k)_+ + (d_k)_-) \leq_{alg} \Big(\sum_{k=1}^{n} \|c_k\| \|d_k\|\Big)(1_A \otimes 1_B)$$

□

1.19 Sei $f \in (A \odot B)^*$ positiv $\overset{GNS}{\rightsquigarrow}$ Hilbertraum $\mathcal{H}_f = \overline{A \odot B / N_f}^{\langle \cdot, \cdot \rangle_f}$

mit zyklischem Vektor $\xi_f = [1_A \otimes 1_B] \in \mathcal{H}_f$

(benutze $\tilde{f}$ falls A, B nicht unital sind)

$*$-Hom. $\pi_f : A \odot B \to \mathcal{B}(\mathcal{H}_f)$:

Für $x, y \in A \odot B$ setze $\pi_f(x)[y] := [xy] \in \mathcal{H}_f$.

$\pi_f(x)$ setzt sich auf $\mathcal{H}_f$ fort:

Nach Lemma 1.18 ex. $\lambda > 0$ mit $x^* x \leq_{alg} \lambda \cdot (1_A \otimes 1_B)$.

Für $y \in A \odot B$ gilt

$$\|\pi_f(x)[y]\|^2 = \|[xy]\|^2 = f(y^* x^* x y)$$

$$= f(y^* \lambda \cdot (1_A \otimes 1_B) y) - \sum_{k=1}^{n} f(y^* z_k^* z_k y)$$

$$\leq \lambda \cdot f(y^* y) = \lambda \|[y]\|^2$$

$\Rightarrow$ $\pi_f(x)$ ist beschränkt auf $A \odot B / N_f$

und setzt sich eindeutig auf $\mathcal{H}_f$ fort.

$\rightsquigarrow$ π_f besitzt eine Fortsetzung $\overline{\pi}_f : A \otimes_{max} B \to \mathcal{B}(\mathcal{H}_f)$;

$\overline{\pi}_f$ induziert (eind.) Fortsetzung $\overline{f}(\cdot) := \langle \xi_f, \overline{\pi}_f(\cdot) \xi_f \rangle$ von f auf $A \otimes_{max} B$.

$\Rightarrow$ $S(A \odot B) \xrightarrow{\cong} S(A \otimes_{max} B)$.

Wir erhalten dann

Satz: $$\|x\|^2_{max} = \sup\left\{ \frac{f(y^*x^*xy)}{f(y^*y)} \;\middle|\; f\in S(A\odot B),\ y\in A\odot B,\ f(y^*y)\neq 0 \right\},$$ $x\in A\odot B$.

Bew.:

$$\|x\|^2_{max} = \sup\left\{ \frac{f(y^*x^*xy)}{f(y^*y)} \;\middle|\; f\in S(A\otimes_{max} B),\ y\in A\odot B,\ f(y^*y)\neq 0 \right\}$$

$$= \sup\left\{ \|\pi_f(x)\|^2 \;\middle|\; f\in S(A\otimes_{max} B) \right\}$$

$$= \|x\|^2_{max}.$$ □

1.20 Seien $f\in A^*$, $g\in B^*$ positiv, dann ist $f\otimes g\in (A\odot B)^*$ positiv, wo $(f\otimes g)(\sum a_i\otimes b_i) := \sum f(a_i)g(b_i)$, denn:

Seien (π_f, ξ_f), (π_g, ξ_g) GNS-Darstellungen, dann gilt

$(f\otimes g)(x) = \langle \xi_f\otimes\xi_g, (\pi_f\otimes\pi_g)(x)(\xi_f\otimes\xi_g)\rangle$, $x\in A\odot B$,

d.h. $f\otimes g$ ist Vektorzustand, also positiv.

Wir erhalten also

Folg.: $$\|x\|_{min}^2 = \sup\left\{ \frac{(f\otimes g)(y^*x^*xy)}{(f\otimes g)(y^*y)} \,\middle|\, f\in S(A),\ g\in S(B),\ y\in A\odot B, (f\otimes g)(y^*y)\neq 0 \right\}.$$

[Tatsächlich genügt es, reine Zustände zu betrachten.]

Bew.: $$\|x\|_{min}^2 = \sup\{ \|(\pi_A\otimes\pi_B)(x^*x)\| \mid \pi_A, \pi_B \text{ Darstlgn.} \}$$

$$= \sup\{ \text{———} \quad (\pi_A, \xi_A), (\pi_B, \xi_B) \text{ zykl. Darstlgn.} \}$$

[trun $\Rightarrow$ jede Darstlg. ist Summe von zykl. Darstlg.]

$$= \sup\left\{ \frac{\langle (\pi_A\otimes\pi_B)(y)(\xi_A\otimes\xi_B), (\pi_A\otimes\pi_B)(x^*x)(\pi_A\otimes\pi_B)(y)(\xi_A\otimes\xi_B)\rangle}{\|(\pi_A\otimes\pi_B)(y)(\xi_A\otimes\xi_B)\|^2} \,\middle|\, (\pi_A,\xi_A), (\pi_B,\xi_B) \text{ zykl. Darstlgn., } y\in A\odot B, \text{ Nenner} \neq 0 \right\}$$

$$= \sup\left\{ \frac{(f_{\xi_A}\otimes f_{\xi_B})(y^*x^*xy)}{(f_{\xi_A}\otimes f_{\xi_B})(y^*y)} \,\middle|\, \text{———} \right\}$$

$$\leq \sup\left\{ \frac{(f\otimes g)(y^*x^*xy)}{(f\otimes g)(y^*y)} \,\middle|\, f\in S(A),\ g\in S(B),\ y\in A\odot B, \text{ Nenner} \neq 0 \right\}$$

$$\overset{\text{GNS}}{\leq} \|x\|_{min}^2 .$$

$\square$

1.21 Satz: Sei $A = C_0(X)$ und B C^*-Algebra.
Dann existiert nur eine C^*-Norm auf $A \odot B$
und $A \otimes B \cong C_0(X, B)$ mit $a \otimes b\,(x) = a(x) \cdot b$, $x \in X$, $a \in A$, $b \in B$.
Falls $B = C_0(Y)$, so haben wir $A \otimes B \cong C_0(X \times Y)$
mit $a \otimes b\,(x, y) = a(x)\, b(y)$.

Bew.: (i) Wir dürfen A, B unital annehmen:
$\|\,.\,\|_{\min, A^\sim \odot B^\sim}\big|_{A \odot B} = \|\,.\,\|_{\min, A \odot B}$, denn $\pi_{A^\sim} \otimes \pi_{B^\sim}\big|_{A \odot B} = \pi_A \otimes \pi_B$.
Ebenso für $\|\,.\,\|_{\max}$ bzw. γ, denn $\pi : A \odot B \to B(H)$ setzt sich fort zu $\tilde{\pi} : A^\sim \odot B^\sim \to B(H)$ nach Satz 1.11/Cor 1.12.

(ii) Es gilt $P(A \otimes_{\max} B) \approx P(A) \times P(B)$:
Sei $f \in P(A \otimes_{\max} B)$, π_f die irreduzible GNS-Darst. und π_A, π_B Darstellungen von A, B nach Satz 1.11.
π_f ist Faktordarst. $\overset{1.11}{\Rightarrow}$ π_A ist Faktordarst., d.h. $\pi_A(A)'' \cap \pi_A(A)' = \mathbb{C}1$
A kommutativ $\Rightarrow$ $\pi_A(A) \subset \mathbb{C} \cdot 1_{H_f}$ $\Rightarrow$ $\pi_A \in \hat{A}$ $\Rightarrow$ $\pi_A(\,.\,) = ev_x(\,.\,) 1_{H_f}$ für ein $x \in X$.
Dann gilt $f(a \otimes b) = \langle \xi_f, ev_x(a) \cdot \pi_f(1_A \otimes b) \xi_f \rangle = ev_x(a) \cdot g(b)$,
wo $g(\,.\,) = \langle \xi_f, \pi_B(\,.\,) \xi_f \rangle$.
π_B ist irreduzibel und g ist Vektorzustand $\Rightarrow$ $g \in P(B)$
$\Rightarrow$ $f = ev_x \otimes g$. [$ev_x \otimes g \in P(A \otimes_{\max} B)$ für $g \in P(B)$ ist klar.]
$\Rightarrow$ $P(A \otimes_{\max} B) \approx X \times P(B) = P(A) \times P(B)$.

(iii) $\|\cdot\|_{max} = \|\cdot\|_{min}$:

$$\|z\|^2_{max} = \sup\{ f(z^*z) \mid f \in P(A \otimes_{max} B)\}$$
$$= \sup\{ (ev_x \otimes g)(z^*z) \mid x \in X,\ g \in P(B)\}$$
$$\overset{1.20}{\leq} \|z\|^2_{min}$$
$$\leq \|z\|^2_{max}, \quad z \in A \odot B.$$

(iv) Es gilt $\mathrm{Prim}(A \otimes_{max} B) \cong X \times \mathrm{Prim}\, B$:

Betrachte das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
ev_x \otimes g \arrow[d, mapsto] & PS(A \otimes_{max} B) \arrow[d] & X \times PS(B) \arrow[l, "\cong"'] \arrow[d] & (x, g) \arrow[d, mapsto] \\
\ker(ev_x \otimes g) & \mathrm{Prim}(A \otimes_{max} B) & X \times \mathrm{Prim}\, B \arrow[l, dashed, "\Theta"'] & (x, \ker \pi_g) \\
\ker(\pi_{ev_x \otimes g}) & \ker(ev_x \otimes \pi_g) & & (x, \ker \pi_g) \arrow[ll, mapsto]
\end{tikzcd}$$

mit $(x, g) \longmapsto ev_x \otimes g$ und $\ker(ev_x \otimes g) = \ker(\pi_{ev_x \otimes g})$.

Θ ist wohldefiniert (dann ist Θ automatisch Homöom.):

$$\begin{tikzcd}
a \otimes b \arrow[d, mapsto] & A \otimes_{max} B \arrow[d, "\delta_x"] \arrow[ddr] & \\
f(a) \cdot b & B \arrow[d, "\pi_g"] & \\
& B(\mathcal{H}_g) \arrow[r, phantom, "\cong"] & B(\mathbb{C} \otimes \mathcal{H}_g)
\end{tikzcd}$$

$$ev_x \otimes \pi_g = \pi_{ev_x \otimes g}$$

$\Rightarrow \ker \pi_{ev_x \otimes g} = \delta_x^{-1}(\ker \pi_g)$ hängt nur von $\ker \pi_g$ ab, nicht von g

$\Rightarrow \Theta$ ist wohldef.

(v) $\|\cdot\|_{max} = \|\cdot\|_{min}$ ist die einzige C^*-Norm auf $A \odot B$:

Sei γ eine weitere C^*-Norm und $q : A \otimes_{max} B \to A \otimes_\gamma B$ die Quotientenabbildung. Damit ist

$$Y := \{ y \in P_{rim}(A \otimes_{max} B) \mid \ker q \subset y \} \underset{abg.}{\subseteq} P_{rim}(A \otimes_{max} B)$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{Erinnerung: } \{\text{abg. Ideale von } C\} \xrightarrow{\cong} \{\text{abg. Teilmengen von } P_{rim}\, C\} \\ \qquad\qquad J \mapsto \{ y \in P_{rim}\, C \mid J \subset y \} \\ \qquad\qquad \bigcap_{y \in U} y \longleftarrow U \\ \qquad\qquad \{0\} \longleftrightarrow P_{rim}\, C \end{array} \right]$$

Angenommen $\{0\} \neq \ker q$.

$\Rightarrow Y \neq P_{rim}(A \otimes_{max} B) \approx X \times P_{rim}\, B$

$\Rightarrow \exists\ \emptyset \neq U \underset{offen}{\subseteq} P_{rim}\, A = X,\ \emptyset \neq V \underset{offen}{\subseteq} P_{rim}\, B$ mit $Y \cap U \times V = \emptyset$.

$\Rightarrow X \setminus U \underset{abg.}{\subsetneq} X, \quad P_{rim}\, B \setminus V \underset{abg.}{\subsetneq} P_{rim}\, B$

und $\bigcap_{x \in X \setminus U} \ker ev_x =: I \neq \{0\}$,

$\bigcap_{z \in P_{rim} B \setminus V} z =: J \neq \{0\}$.

$[y = (y_A, y_B)]$

$\Rightarrow \ker q = \bigcap_{y \in Y} y \supset \bigcap_{y \notin U \times V} y = \left(\bigcap_{y_A \notin U} y \right) \cap \left(\bigcap_{y_B \notin V} y \right) \supset I \odot B \cap A \odot J$
$\supset I \odot J \neq \{0\}$.

$\Rightarrow \gamma(I \odot J) = 0$ ↯ denn γ ist Norm auf $A \odot B$. □

1.22 Satz: Seien A, B C^*-Algebren, und sei γ eine C^*-Norm auf $A \odot B$.

Dann gilt $\|x\|_{min} \leq \gamma(x)$, $x \in A \odot B$.

Bew.: (i) Wir dürfen A, B unital annehmen:

Nach Cor. 1.12 setzt sich γ auf $A^\sim \odot B^\sim$ fort;

weiter gilt $\| \cdot \|_{min, A^\sim \odot B^\sim}\big|_{A \odot B} = \| \cdot \|_{min, A \odot B}$. [Übg]

(ii) $f \in P(A)$, $g \in P(B) \Rightarrow f \otimes g$ ist stetig bzgl. γ und setzt sich fort zu einem Zustand auf $A \otimes_\gamma B$:

Setzen $S_\gamma := \{(f,g) \in P(A) \times P(B) \mid f \otimes g$ hat Fortsetzung zu Zustand auf $A \otimes_\gamma B\}$,

dann ist $S_\gamma \subseteq_{abg} P(A) \times P(B)$ (w^*-Top. $\times$ w^*-Top.) [Übg].

Für $b \in B_+$ setzen $C := C^*(b) \cong C_0(\sigma(b) \setminus \{0\})$.

Wähle $\omega \in P(C)$ mit $\omega(b) = \|b\|$.

Falls nun $f'_1 \in P(A)$, so ist $f' \otimes \omega \in P(A \otimes_{max} C) \overset{\text{Bew. 1.21}}{=} P(A \otimes_\gamma C)$ (1.21);

mit Krein-Milman erhält man Fortsetzung zu $\Theta \in P(A \otimes_\gamma B)$.
(OAI, Cor. 7.14)

Es gilt $\Theta = f' \otimes g'$, wobei $g' := \Theta|_{1_A \otimes_\gamma B} \in P(B)$:

$y \in B^1_+ \rightsquigarrow f_1(x) := \Theta(x \otimes y)$, $f_1 \in A^*$

$f_2(x) := \Theta(x \otimes (1_B - y))$, $f_2 \in A^*$

$\Rightarrow f' = f_1 + f_2$; f' rein $\Rightarrow f_1 = \lambda \cdot f'$, $\lambda = f_1(1_A) = g'(y)$

$\Rightarrow \Theta(x \otimes y) = f_1(x) = f'(x) \cdot g'(y) = f' \otimes g'(x \otimes y)$.

g' rein ✓ [warum?]

Weiter gilt $\|b\| = \omega(b) = f'\otimes\omega(1_A \otimes b) = \Theta(1_A\otimes b) = f'\otimes g'(1_A\otimes b) = g'(b)$.

$\Rightarrow \mathcal{Y} := \{ g' \in P(B) \mid (f', g') \in S_\gamma \}$ normierend B

[Übg]
$\Rightarrow \quad \mathcal{Y} \underset{\text{dicht}}{\subset} P(B)$.

Also $\{f'\} \times \mathcal{Y} \subset S_\gamma \underset{\text{abg.}}{\subset} P(A) \times P(B)$

$\Rightarrow \{f'\} \times P(B) = \{f'\} \times \overline{\mathcal{Y}}^{P(B)} = \overline{\{f'\} \times \mathcal{Y}}^{P(A)\times P(B)} \subset S_\gamma$

$f' \in P(A)$ beliebig
$\Rightarrow \quad P(A) \times P(B) = S_\gamma$.

(iii) Jedes $f \otimes g$, $f \in S(A)$, $g \in S(B)$, setzt sich zu einem Zustand auf $A \otimes_\gamma B$ fort. [Warum?]

(iv) Für $x \in A \odot B$ gilt

$$\|x\|_{\min}^2 \overset{1.20}{=} \sup\left\{ \frac{f\otimes g\,(y^* x^* x y)}{f\otimes g\,(y^* y)} \;\middle|\; \begin{array}{l} f \in S(A),\ g \in S(B), \\ y \in A \odot B,\ \text{Nenner} \neq 0 \end{array} \right\}$$

$$\overset{(iii)}{\leq} \sup\left\{ \gamma(x^* x) \cdot \frac{f\otimes g\,(y^* y)}{f\otimes g\,(y^* y)} \;\middle|\; \ldots \right\}$$

$$= \gamma(x^* x) = \gamma(x)^2.$$

$\square$

1.23 Bem.: (i) Für jede C^*-Norm γ auf $A \odot B$ gilt

$$\|\,.\,\|_{min} \leq \gamma(\,.\,) \leq \|\,.\,\|_{max}$$

und

$$\gamma(a \otimes b) = \|a\|\,\|b\|, \quad a \in A,\ b \in B,$$

denn

$$\begin{aligned}
\|a\|^2 \cdot \|b\|^2 &\geq \gamma(a \otimes b)^2 \\
&\geq \|a \otimes b\|^2_{min} \\
&\overset{1.20}{\geq} \sup\{ f \otimes g\,(a^*a \otimes b^*b) \mid f \in P(A),\ g \in P(B)\} \\
&= \sup\{ f(a^*a)\, g(b^*b) \mid \text{—} \} \\
&= \|a^*a\|\,\|b^*b\| \\
&= \|a\|^2\,\|b\|^2 .
\end{aligned}$$

(ii) Wir haben kanonische $*$-Homomorphismen

$$A \otimes_{max} B \twoheadrightarrow A \otimes_\gamma B \twoheadrightarrow A \otimes_{min} B.$$

1.24 Cor.: A, B einfach $\Rightarrow$ $A \otimes_{min} B$ einfach.

Bew.: z.z.: jede irr. Darst. $\pi : A \otimes_{min} B \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ ist isometrisch.

[Denn: $J \triangleleft A \otimes_{min} B$, $A \otimes_{min} B \twoheadrightarrow A \otimes_{min} B/J \xrightarrow[\text{irr}]{} \mathcal{B}(\mathcal{H})$ $\Rightarrow \pi$ irr $\Rightarrow \pi$ isom. $\Rightarrow J = 0$.]

genügt z.z.: Für $\pi : A \otimes_{min} B \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ irr ist $\pi|_{A \odot B}$ treu.

Denn: dann ist $\gamma(\,.\,) := \|\pi(\,.\,)\|$ C^*-Norm auf $A \odot B$

$$\Rightarrow \|\,.\,\|_{min} \overset{1.22}{\leq} \gamma(\,.\,) \overset{\pi \text{ kontraktiv}}{\leq} \|\,.\,\|_{min} \Rightarrow \pi \text{ isometrisch.}$$

Sei also π irr. gegeben und seien π_A, π_B wie in 1.11.

Sei $c = \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes b_i \in A \odot B$ mit $\pi(c) = \sum_{i=1}^{n} \pi_A(a_i)\pi_B(b_i) = 0$.

z.z.: $c = 0$.

Setze $\tilde{\mathcal{H}} := \mathcal{H} \otimes \mathbb{C}^n$ und

$$X := \left\{ \sum_{i=1}^{n} \pi_B(b b_i)\xi \otimes e_i \;\middle|\; \xi \in \mathcal{H}, b \in B \right\} \subseteq_{\text{abg.}} \tilde{\mathcal{H}}$$

$$Y := \left\{ \sum_{i=1}^{n} \pi_A(a_i^*)\eta \otimes e_i \;\middle|\; \eta \in \mathcal{H} \right\} \subseteq_{\text{abg.}} \tilde{\mathcal{H}}.$$

$\pi(c) = 0 \Rightarrow X \perp Y$.

Sei $B(\tilde{\mathcal{H}}) \ni p : \tilde{\mathcal{H}} \to X$ die orth. Projektion;

mit $B(\tilde{\mathcal{H}}) \cong M_n(B(\mathcal{H}))$ können wir $p = (p_{ij})$, $p_{ij} \in B(\mathcal{H})$ schreiben.

Es gilt $(\pi_B(B) \otimes 1_{\mathbb{C}^n})X \subset X$ und $(\pi_A(A) \otimes 1_{\mathbb{C}^n})X \subset X$ $([\pi_A(A), \pi_B(B)] = 0)$

$\Rightarrow p \in (\pi_B(B) \otimes 1_{\mathbb{C}^n})' \cap (\pi_A(A) \otimes 1_{\mathbb{C}^n})' \subset (\pi(A \otimes_{\min} B) \otimes 1_{\mathbb{C}})'$

[warum?]

$\Rightarrow p_{ij} \in \pi(A \otimes_{\min} B)' \overset{\pi \text{ irr}}{\Rightarrow} p_{ij} \in \mathbb{C} \cdot 1_{\mathcal{H}} \Rightarrow p \in 1_{\mathcal{H}} \otimes M_n$.

Für $b \in B$, $\xi \in \mathcal{H}$ haben wir

$$X \ni \sum_{j=1}^{n} \pi_B(b b_j)\xi \otimes e_j = p\left(\sum_{j=1}^{n} \pi_B(b b_j)\xi \otimes e_j\right) = \sum_{i,j=1}^{n} p_{ij}\pi_B(b b_j)\xi \otimes e_i$$

$\Rightarrow \pi_B(b b_i)\xi = \sum_{j=1}^{n} p_{ij}\pi_B(b b_j)\xi$, $b \in B$, $\xi \in \mathcal{H}$, $i = 1, \dots, n$

$\Rightarrow \pi_B(b_i) = \sum_{j=1}^{n} p_{ij}\pi_B(b_j)$, $i = 1, \dots, n$.

Weiter gilt

$$0 = p \underbrace{\sum_{j=1}^{n} \pi_A(a_j^*)\eta \otimes e_j}_{\in Y} = \sum_{i,j=1}^{n} p_{ij}\, \pi_A(a_j^*)\eta \otimes e_i , \quad \eta \in \mathcal{H}$$

$$\Rightarrow 0 = \sum_{j=1}^{n} p_{ij}\, \pi_A(a_j^*) , \quad i = 1, \dots, n$$

$$\Rightarrow 0 = \sum_{j=1}^{n} \overline{p_{ij}}\, \pi_A(a_j) , \quad i = 1, \dots, n$$

$$\left[\overset{p=p^*}{=} \sum_{i=1}^{n} p_{ij}\, \pi_A(a_i) , \quad j = 1, \dots, n \right]$$

Wir erhalten

$$B(\mathcal{H}\otimes\mathcal{H}) \supset B(\mathcal{H}) \odot B(\mathcal{H}) \ni \pi_A \otimes \pi_B (c) = \sum_{i=1}^{n} \pi_A(a_i) \otimes \pi_B(b_i)$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} \pi_A(a_i) \otimes p_{ij}\, \pi_B(b_j)$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} p_{ij}\, \pi_A(a_i) \otimes \pi_B(b_j)$$

$$= 0 .$$

π_A, π_B treu $\Rightarrow$ $\pi_A \otimes \pi_B \big|_{A \odot B}$ treu $\Rightarrow c = 0$. ∎

1.25 Prop.: A_1, A_2, B_1, B_2 C^*-Algebren, $\varphi : A_1 \to A_2$, $\psi : B_1 \to B_2$ *-Hom., dann existieren kanonische *-Hom.

$$\varphi \otimes \psi : A_1 \odot B_1 \to A_2 \odot B_2 ,$$

$$\varphi \otimes_{max} \psi : A_1 \otimes_{max} B_1 \to A_2 \otimes_{max} B_2$$

$$\varphi \otimes_{min} \psi : A_1 \otimes_{min} B_1 \to A_2 \otimes_{min} B_2 .$$

Falls φ, ψ injektiv sind, so auch $\varphi \otimes_{min} \psi$ (i.a. falsch für $\varphi \otimes_{max} \psi$).

Beweis: Übung. ∎