2. Nuklearität und Exaktheit

2.1 Def.: Eine C^*-Algebra A heißt nuklear, falls für jede C^*-Algebra B nur eine C^*-Norm auf $A \odot B$ ex. (d.h. $\|.\|_{min} = \|.\|_{max}$, bzw. $A \otimes_{max} B = A \otimes_{min} B$).

2.2 Prop.: (i) A, B nuklear $\Rightarrow$ $A \oplus B$, $A \otimes B$ nuklear.

(ii) $A = \lim\limits_{\rightarrow} A_i$, A_i nuklear für alle i $\Rightarrow$ A nuklear.

(iii) $0 \to J \to A \to A/J \to 0$, dann gilt: A nuklear $\Leftrightarrow$ $J, A/J$ nuklear.

Bew.: (i) $\oplus$: ✓ $\quad \otimes$: Assoziativität von $\otimes_{max}$ und $\otimes_{min}$

(ii) klar für injektive Verbindungsabbildungen (warum?); i.a. benutze (iii).

(iii) "$\Rightarrow$": J nuklear,

$$\begin{tikzcd} J \otimes_{max} B \arrow[r, two heads, "\rho"] & \overline{J \odot B}^{\|.\|_{max, A \odot B}} \arrow[d] & \triangleleft & A \otimes_{max} B \arrow[d, equal] \\ & J \otimes_{min} B \arrow[rr, hook, "1.25"] & & A \otimes_{min} B \end{tikzcd} \quad \left[\|.\|_{min, J \odot B} = \|.\|_{min, A \odot B}\big|_{J \odot B}\right]$$

$$\Rightarrow \overline{J \odot B}^{\|.\|_{max, A \odot B}} = J \otimes_{min} B$$

Falls nun $\pi : J \odot B \to B(\mathcal{H})$ eine nichtdeg. Darst. ist und (h_λ), (f_ν) appr. Einsen für J bzw. B sind, so definieren wir $\sigma : A \odot B \to B(\mathcal{H})$ durch

$$\sigma(a \otimes b) := \text{s.o.-}\lim_{\lambda,\nu} \pi(ah_\lambda \otimes b f_\nu).$$

σ existiert und setzt π fort.

$\Rightarrow$ Für $x \in J \odot B \subset J \otimes_{max} B$ gilt:

$$\begin{aligned}
\|x\|_{max, J\odot B} &= \sup\{\|\pi(x)\| \mid \pi \text{ Darst. von } J \odot B\} \\
&\leq \sup\{\|\sigma(x)\| \mid \sigma \text{ Darst. von } A \odot B\} \\
&= \|\rho(x)\|_{max, A \odot B} \\
&\leq \|x\|_{max, J \odot B}
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ ρ ist isometrisch

$\Rightarrow$ $J \otimes_{max} B = J \otimes_{min} B$.

$\Rightarrow$ J ist nuklear.

A/J nuklear: später.

"$\Leftarrow$": auch später. $\square$

2.3 z.B.: (i) A endl. dimensional $\Rightarrow$ A nuklear.

Beweis: Wegen 2.2 (i) dürfen wir $A = M_n$ annehmen.
Sei B ein C^*-Algebra, dann ist $A \odot B$ bereits vollständig bzgl. $\|.\|_{min}$: Sei $(d_\lambda)_\lambda$ Cauchy bzgl. $\|.\|_{min}$, wo $d_\lambda = \sum_{i,j=1}^{n} e_{ij} \otimes b_{ij,\lambda}$ mit $(b_{ij,\lambda})_\lambda \subset B$, $i,j = 1,\dots,n$, dann ist $e_{ij} \otimes b_{ij,\lambda} = (e_{ii} \otimes 1_{\tilde{B}})\, d_\lambda\, (e_{jj} \otimes 1_{\tilde{B}})$ ebenfalls Cauchy $\Rightarrow$ $b_{ij,\lambda}$ ist Cauchy bzgl. $\|.\|_B$, denn $\|e_{ij} \otimes b\|_{min} = \|e_{ij}\|\,\|b\| = \|b\|$ nach Bem. 1.23 (i) $\Rightarrow (b_{ij,\lambda})_\lambda$ konvergiert für alle i,j $\Rightarrow d_\lambda$ konvergiert $\Rightarrow (A \odot B, \|.\|_{min})$ ist C^*-Algebra $\Rightarrow \gamma = \|.\|_{min}$ für jede andere C^*-Norm γ. □

(ii) $A = C_0(X)$ ist nuklear nach Satz 1.21

(iii) A AF (z.B. M_{2^∞}) ist nuklear

(iv) A AH (z.B. A_Θ) ist nuklear

(v) Die Toeplitzalgebra $\mathcal{T}$ ist nuklear: $0 \to \mathcal{K} \to \mathcal{T} \to C(S^1) \to 0$, Kap. 2.4 (ii)

(vi) ¿ $C^*_{(r)}(G)$?

(vii) ¿ $A \rtimes_{\alpha\,(r)} G$?

2.4 Prop. $A\otimes_{max} \sqcup$ ist ein exakter Funktor für jede C^*-Algebra A.

Bew.: Für Funktorialität benutze Prop. 1.25 $\leadsto$ $\pi: B\to C$ induziert $id_A\otimes_{max}\pi : A\otimes_{max} B \to A\otimes_{max} C$.

Sei nun $0 \to J \xrightarrow{\iota} B \xrightarrow{\pi} B/J \to 0$ exakt.

z.z.: $0 \to \underset{①}{A\otimes_{max} J} \xrightarrow{id_A\otimes_{max}\iota} \underset{②}{A\otimes_{max} B} \xrightarrow{id_A\otimes_{max}\pi} \underset{③}{A\otimes_{max} B/J} \to 0$ ist exakt.

$id_A\otimes_{max}\pi$ hat dichtes und vollständiges Bild $\Rightarrow$ surjektiv, d.h. Exaktheit in ③.

$id_A\otimes_{max}\iota$ injektiv (d.h. Exaktheit in ①):

Sei $f\in S(A\otimes_{max} J) \overset{1.19}{\approx} S(A\odot J)$. Sei $(u_\lambda)_\lambda$ approx. Eins für J.

$a\otimes b \mapsto \lim_\lambda f(a\otimes u_\lambda b u_\lambda)$ definiert dann eine Fortsetzung von f zu $\tilde f \in S(A\odot B) \overset{1.19}{\approx} S(A\otimes_{max} J)$ [Warum?]

$\overset{\text{Satz 1.19}}{\Rightarrow}$ $\|\cdot\|_{A\otimes_{max} J} = \|\cdot\|_{A\otimes_{max} B}\big|_{A\odot J}$

$\Rightarrow$ $id_A\otimes_{max}\iota$ ist isometrisch auf $A\odot J$, dann aber auch auf $A\otimes_{max} J$ (wegen Stetigkeit).

Exaktheit in ②:

Wir haben $A\otimes_{max} J \triangleleft A\otimes_{max} B$ und $A\otimes_{max} J \subset \ker(id_A\otimes_{max}\pi)$. [Warum?]

$\Rightarrow$ $A\otimes_{max} B / A\otimes_{max} J \overset{\sigma}{\twoheadrightarrow} A\otimes_{max} B/\ker(id_A\otimes_{max}\pi) \overset{③}{\cong} A\otimes_{max} B/J$.

Weiter haben wir $A\odot B \cap A\otimes_{max} J = A\odot J$ ("$\supseteq$" klar, "$\subseteq$" Lin. Alg.)

$$\Rightarrow A\odot B/J = A\odot B/_{A\odot J} = A\odot B/_{A\odot B\cap A\otimes_{max} J} \overset{\subseteq}{\text{dicht}} A\otimes_{max} B/_{A\otimes_{max} J}$$

$$\Rightarrow A\otimes_{max} B/J \overset{g}{\twoheadrightarrow} A\otimes_{max} B/_{A\otimes_{max} J}$$

$\sigma\circ g|_{A\odot B/J} = id_{A\odot B/J}$ $\Rightarrow$ $\sigma\circ g$ ist isometrisch auf $A\odot B/J$

$\overset{\text{dicht}}{\Rightarrow}$ $\sigma\circ g$ ist isometrisch

$\Rightarrow$ σ injektiv

$\Rightarrow$ $A\otimes_{max} J = \ker(id_A\otimes_{max}\pi)$

$\Rightarrow$ Exaktheit in (2). □

2.5 Def.: Eine C^*-Algebra A heißt exakt, falls $A\otimes_{min}$ – ein exakter Funktor ist, d.h.: $0\to J\xrightarrow{\iota} B\xrightarrow{\pi} B/J\to 0$ exakt

$$\Rightarrow 0\to A\otimes_{min} J\xrightarrow{id_A\otimes_{min}\iota} A\otimes_{min} B\xrightarrow{id_A\otimes_{min}\pi} A\otimes_{min} B/J\to 0$$ ist exakt

2.6 <u>Bem.:</u> (i) A nuklear $\Rightarrow$ A exakt nach Prop. 2.4.

(ii) Bew. von "$\Leftarrow$" aus Prop. 2.2 (iii):

z.z.: $J \trianglelefteq A$, $J, A/J$ nuklear $\Rightarrow$ A nuklear.

Betrachte

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 \to & B \otimes_{max} J & \to & B \otimes_{max} A & \to & B \otimes_{max} A/J & \to 0 & \text{exakt} \\ & \cong \downarrow \varphi_J & & \downarrow \varphi_A & & \cong \downarrow \varphi_{A/J} & & \\ 0 \to & B \otimes_{min} J & \to & B \otimes_{min} A & \to & B \otimes_{min} A/J & \to 0 & (*) \end{array}$$

Weiter $B \odot A \cap B \otimes_{min} J = B \odot J$ (s.o.)

$\leadsto B \odot A/J = B \odot A/_{B \odot J} = B \odot A/_{B \odot A \cap B \otimes_{min} J} \underset{dicht}{\subset} B \otimes_{min} A/_{B \otimes_{min} J}$

$\Rightarrow \|\cdot\|_{min}$ auf $B \otimes_{min} A$ induziert C^*-Norm γ auf $B \odot A/J$ und $B \otimes_\gamma A/J \cong B \otimes_{min} A/B \otimes_{min} J$

A/J nuklear $\Rightarrow$ $\gamma = \|\cdot\|_{min, B \odot A/J}$ $\Rightarrow B \otimes_\gamma A/J \cong B \otimes_{min} A/J$

$$\Rightarrow 0 \to B \otimes_{min} J \to B \otimes_{min} A \to \overset{B \otimes_{min} A / B \otimes_{min} J}{\overset{\|}{\underset{\underset{B \otimes_{min} A/J}{\|}}{B \otimes_\gamma A/J}}} \to 0 \quad \text{ist exakt}$$

$\Rightarrow$ $(*)$ ist exakt. $\overset{5\text{-Lemma}}{\Rightarrow}$ φ_A ist Isomorphismus. $\square$

2.7 <u>Satz</u> (Kirchberg; Wassermann): Eine C^*-Unteralgebra einer exakten C^*-Algebra ist exakt.
Insbesondere sind C^*-Unteralgebren von nuklearen C^*-Algebren exakt.

Bew. (Idee): Seien $A \subset C$ C^*-Algebren und sei C exakt.
Sei $0 \to J \to B \xrightarrow{\pi} B/J \to 0$ eine beliebige kurze exakte Sequenz von C^*-Algebren.
Es genügt zu zeigen: $A \otimes_{min} J = \ker id_A \otimes_{min} \pi$ ["$\subset$" ist klar]
(d.h. Exaktheit von $0 \to A\otimes_{min} J \to A\otimes_{min} B \to A \otimes_{min} B/J \to 0$ in der Mitte).

1. Es gilt $\underbrace{C\otimes_{min} J \cap A \otimes_{min} B}_{C \otimes_{min} B} = A \otimes_{min} J$ ["$\supset$" klar, "$\subset$" approx. E.]

2. Sei $\varphi \in S(A)$, dann betrachte die 'slice map'
$$\varphi \otimes id_B : A \odot B \to \mathbb{C} \odot B = B$$
$$a \otimes b \mapsto \varphi(a) b$$
$\varphi \otimes id_B$ ist stetig bzgl. $\|\cdot\|_{min}$ und wir erhalten eine stetige Fortsetzung $\varphi \otimes_{min} id_B : A \otimes_{min} B \to B$. [Übung]

3. Betrachte $K_J := \{x \in A \otimes_{min} B \mid \varphi \otimes_{min} id_B (x^* x) \in J$ für alle $\varphi \in S(A)\}$ und zeige $K_J = \ker(id_A \otimes_{min} \pi)$ [benutze 1.20].

4. $K_J \subset A \otimes_{min} J$: Sei $x_0 \in K_J$.
Falls $f \in S(C)$, so ist $\varphi := f|_A$ bis auf Normierung in $S(A)$ (oder $\varphi = 0$) und es gilt $f \otimes_{min} id_B (x_0^* x_0) = \varphi \otimes_{min} id_B (x_0^* x_0) \in J$
$\Rightarrow x_0 \in \{x \in C \otimes_{min} B \mid f \otimes_{min} id_B (x^* x) \in J$ für alle $f \in S(C)\} \overset{3.}{=} \ker(id_C \otimes_{min} \pi) \overset{C \text{ exakt}}{=} C \otimes_{min} J$.
$\Rightarrow x_0 \in A \otimes_{min} B \cap C \otimes_{min} J \overset{1.}{=} A \otimes_{min} J$. □