3. Vollständig positive Abbildungen

3.1 Erinnerung: Eine Abbildung $\varphi: A \to B$ induziert

$$\varphi^{(n)}: M_n(A) \to M_n(B)$$

$$(a_{ij})_{ij} \mapsto (\varphi(a_{ij}))_{ij}$$

$$(\text{d.h. } \varphi^{(n)} = \varphi \otimes \mathrm{id}_{M_n})$$

(A, B nicht notwendigerweise C^*-Algebren)

φ linear $\Rightarrow$ $\varphi^{(n)}$ linear für alle $n \in \mathbb{N}$

φ $*$-Hom. $\Rightarrow$ $\varphi^{(n)}$ $*$-Hom. für alle n

φ positiv $\not\Rightarrow$ $\varphi^{(n)}$ positiv (s. 35)

3.2 Def.: Seien A, B C^*-Algebren, $\varphi: A \to B$ linear.

(i) φ heißt positiv, falls $\varphi(A_+) \subset B_+$.

(ii) φ heißt n-positiv, falls $\varphi^{(n)}$ positiv ist.

(iii) φ heißt vollständig positiv (v.p.), falls $\varphi^{(n)}$ positiv ist für alle $n \in \mathbb{N}$.

(iv) φ heißt vollständig beschränkt (v.b.), falls $\|\varphi\|_{vb} := \sup_n \|\varphi^{(n)}\| < \infty$.

3.3 Def.: Sei A eine unitale C^*-Algebra.
Ein unitaler selbstadjungierter UVR $X \subset A$ heißt Operatorsystem.

3.4 Bem. (i) Sei X ein Operatorsystem, dann gilt $X = \operatorname{span} X_+$:

$$x \in X \Rightarrow x + x^*,\ i(x - x^*) \in X_{s.a.},\quad x = \tfrac{1}{2}(x + x^* - i \cdot i(x - x^*))$$

$$y \in X_{s.a.} \Rightarrow \|y\| \cdot \mathbb{1} - y,\ \|y\| \cdot \mathbb{1} \in X_+,$$

$$y = \|y\| \cdot \mathbb{1} - (\|y\| \cdot \mathbb{1} - y)$$

(ii) Def. 3.2 ist auch sinnvoll für $\varphi : X \to Y$, wo X, Y Operatorsysteme sind.

3.5 z.B. (i) $\varphi : A \to B$ $*$-Hom. $\Rightarrow \varphi$ v.p.

[φ positiv, da $\varphi(x^*x) = \varphi(x)^*\varphi(x) \geq 0$, $x \in A$

$\varphi^{(n)}$ $*$-Hom. nach 3.1 $\Rightarrow \varphi^{(n)}$ ist positiv für alle n]

(ii) Sei $\varphi : A \to B$ n-positiv, $v \in B$.

Dann ist die Kompression $\varphi_v : A \to B$, gegeben durch

$$\varphi_v(a) := v^* a v,$$

n-positiv, denn

$$(\varphi_v)^{(n)} = (\varphi^{(n)})_{v \otimes \mathbb{1}_{M_n}}$$

und

$$(\varphi_v)^{(n)}(x^*x) = (v^* \otimes \mathbb{1}_{M_n}) \underbrace{\varphi^{(n)}(x^*x)}_{\geq 0} (v \otimes \mathbb{1}_{M_n}) \geq 0 \quad \text{für } x \in M_n(A) = M_n \otimes A.$$

Insbesondere gilt:

φ v.p. $\Rightarrow \varphi_v$ v.p.

φ $*$-Hom $\Rightarrow \varphi_v$ v.p. Werden sehen, dass jede v.p. Abb. von dieser Form ist.

(iii) $\varphi : \mathbb{C}^k \to B$ ist positiv g.d.w. $b_i := \varphi(e_i) \geq 0$, $i = 1, \ldots, k$,

$\varphi(\lambda_1, \ldots, \lambda_k) = \lambda_1 \cdot b_1 + \ldots + \lambda_k \cdot b_k$.

$\varphi : \mathbb{C}^k \to C(X)$ ist unital und positiv g.d.w. $(b_i)_{i=1,\ldots,k}$ ist Z.d.E.

(iv) $\tau : M_2 \to M_2$, $\tau(a) = a^T$ ist positiv, aber nicht 2-positiv:

$\tau(a^* a) = a^* a \geq 0 \Rightarrow \tau$ ist positiv.

$$x := \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \in M_2(M_2), \quad x \geq 0 \ [\text{warum?}],$$

aber $\tau^{(2)}(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \not\geq 0$. [warum?]

3.6 <u>Prop.</u>: Seien A, B C^*-Algebren und $\varphi : A \to B$ positiv. Dann ist φ beschränkt.

Bew.: Falls φ unbeschränkt auf A ist, dann auch auf A_+ und es ex. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A_+^1$ mit $\|\varphi(a_n)\| \geq n^3$, $n \in \mathbb{N}$.

Dann ist $a := \sum_{n=0}^{\infty} n^{-2} \cdot a_n \in A$ und $n^{-2} \cdot a_n \leq a$, $n \in \mathbb{N}$.

$\Rightarrow n \leq \frac{1}{n^2} \cdot \|\varphi(a_n)\| = \|\varphi(\frac{1}{n^2} \cdot a_n)\| \leq \|\varphi(a)\|$, $n \in \mathbb{N}$ ↯

□

3.7 Bemerkung (i) X ein Operatorsystem, $\varphi : X \to B$ positiv

$$\Rightarrow \|\varphi\| \le 2\|\varphi(1)\| \text{ [warum?]}$$

(ii) In (i) kann Gleichheit auftreten:

$X := \operatorname{span}\{1, z, \bar{z}\} \subset C(\mathbb{T})$

$\varphi : X \to M_2$, $\varphi(a + bz + c\bar{z}) = \begin{pmatrix} a & 2b \\ 2c & a \end{pmatrix}$ ist positiv.

[warum?]

Es gilt

$$2 \cdot \|\varphi(1)\| = 2 = \|\varphi(z)\| \le \|\varphi\| \overset{(i)}{\le} 2 \cdot \|\varphi(1)\|$$

also

$$\|\varphi\| = 2\,\|\varphi(1)\|.$$

3.8 Lemma: Sei A eine C^*-Algebra, $a, h \in \underbrace{A, h = h^*}_{\text{redundant}}$.

(i)

$$\cancel{\|a\| \le 1 \Leftrightarrow} \begin{pmatrix} 1_{A^{\sim}} & a \\ a^* & 1_{A^{\sim}} \end{pmatrix} \ge 0 \Leftrightarrow \|a\| \le 1$$

(ii)

$$\begin{pmatrix} h & a \\ a^* & h \end{pmatrix} \ge 0 \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} a^*a \le \|h\| \cdot h \quad (\Rightarrow \|a\| \le \|h\|)$$

(iii)

$$\begin{pmatrix} 1_{A^{\sim}} & a \\ a^* & h \end{pmatrix} \ge 0 \Leftrightarrow a^*a \le h.$$

Bew.: o.E. $\mathcal{A} \subset B(\mathcal{H})$, $M_2(\mathcal{A}) \subset M_2(B(\mathcal{H})) \cong B(\mathcal{H} \oplus \mathcal{H})$.

(i) $\left\langle \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1_{\mathcal{H}} & a \\ a^* & 1_{\mathcal{H}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \right\rangle = \langle \xi, \xi \rangle + \langle \xi, a\eta \rangle + \langle \eta, a^*\xi \rangle + \langle \eta, \eta \rangle \quad (*)$

$\geq \|\xi\|^2 - 2\|a\| \, \|\xi\| \, \|\eta\| + \|\eta\|^2 \quad (**)$

$\|a\| \leq 1 \Rightarrow (**) \geq 0$ für alle $\xi, \eta \in \mathcal{H} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1_{\mathcal{H}} & a \\ a^* & 1_{\mathcal{H}} \end{pmatrix} \geq 0$.

$\|a\| > 1 \Rightarrow \exists\, \xi, \eta \in \mathcal{H} : \|\xi\| = \|\eta\| = 1, \langle \xi, a\eta \rangle < -1$

$\Rightarrow (*) < 0 \Rightarrow (\quad) \not\geq 0$.

(ii) "$\Rightarrow$": Sei $\eta \in \mathcal{H}$, $\xi := -\frac{1}{\|h\|} \cdot a\eta$, dann gilt

$0 \leq \left\langle \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} h & a \\ a^* & h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \right\rangle = \dots \leq \frac{1}{\|h\|} \langle \eta, a^*a\eta \rangle - \frac{2}{\|h\|} \langle \eta, a^*a\eta \rangle + \langle \eta, h\eta \rangle$

$\Rightarrow \langle \eta, (h - \frac{1}{\|h\|} \cdot a^*a)\eta \rangle \geq 0, \quad \eta \in \mathcal{H}$

$\Rightarrow \|h\| \cdot h \geq a^*a$.

"$\Leftarrow$": Übung.

(iii) Übung.

$\square$

3.9 Prop.: Sei X ein Operatorsystem, B eine unitale C^*-Alg. und $\varphi : X \to B$ unital, 2-positiv.

Dann gilt $\|\varphi\| \leq 1$.

Bew.: $a \in X$, $\|a\| \leq 1 \overset{3.8(i)}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & a \\ a^* & 1 \end{pmatrix} \geq 0 \overset{\varphi \text{ 2-pos.}}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & \varphi(a) \\ \varphi(a)^* & 1 \end{pmatrix} \overset{3.8(i)}{\geq 0 \Rightarrow} \|\varphi(a)\| \leq 1.$ □

3.10 Prop. (C-S Ungleichung): Seien A, B unitale C^*-Algebren, $\varphi : A \to B$ unital, 2-positiv.

Dann gilt $\varphi(a)^* \varphi(a) \leq \varphi(a^* a)$, $a \in A$.

Bew.: $\begin{pmatrix} 1 & a \\ a^* & a^* a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a^* & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \geq 0 \overset{\varphi \text{ 2-pos.}}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & \varphi(a) \\ \varphi(a)^* & \varphi(a^* a) \end{pmatrix} \geq 0$

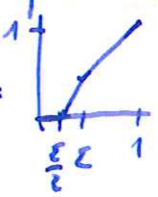
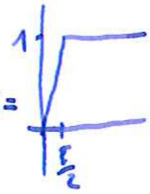
$\overset{3.8(iii)}{\Rightarrow} \varphi(a)^* \varphi(a) \leq \varphi(a^* a).$ □

3.11 Prop./Def.: Sei A eine C^*-Algebra, dann gilt

$\mathcal{F}(A) := \{ a \in A \mid \exists\, e \in A,\ \|e\| \leq 1,\ ea = ae = a \} \underset{\text{dicht}}{\subset} A$

sowie $\mathcal{F}(A)_{+,\,s.a.} \underset{\text{dicht}}{\subset} A_{+,\,s.a.}$.

Bew.: Sei $(u_\lambda)_\Lambda$ appr. Eins für A.

Für $\varepsilon > 0$ definiere $f_\varepsilon :=$  , $g_\varepsilon :=$  $\in C_0((0,1])$.

Es gilt $\lim_{\varepsilon,\lambda} f_\varepsilon(u_\lambda)\, a\, f_\varepsilon(u_\lambda) = a$, $a \in A$

und $f_\varepsilon(u_\lambda)\, a\, f_\varepsilon(u_\lambda) \in \mathcal{F}(A)_{(+)}$, $a \in A_{(+)}$, $\varepsilon > 0$, $\lambda \in \Lambda$,

denn $g_\varepsilon(u_\lambda) f_\varepsilon(u_\lambda) = f_\varepsilon(u_\lambda) g_\varepsilon(u_\lambda) = f_\varepsilon(u_\lambda)$. □

3.12 Bem.: $\mathrm{Ped}(A) := A\,\mathcal{F}(A)\,A \underset{\text{dicht}}{\subseteq} A$ ist das (eindeutig bestimmte) minimale dichte Ideal in A. [A unital $\Rightarrow A = \mathcal{F}(A) = \mathrm{Ped}(A)$]

$\mathrm{Ped}(A)$ heißt Pedersen Ideal.

3.13 Prop.: Seien A, B C^*-Algebren, $\varphi : A \to B$ v.p. und $\mu \geq \|\varphi\|$.

Sei $\varphi^+ : A^+ \to B^+$ die durch $\varphi^+(1_{A^+}) = \mu \cdot 1_{B^+}$ definierte lineare Fortsetzung. [bzw. $B^\sim$]

Dann ist φ^+ v.p. [und es gilt $\|\varphi^+\| = \mu$].

Bew.: $\varphi^+(a + \lambda \cdot 1_{A^+}) := \varphi(a) + \mu \cdot \lambda \cdot 1_{B^+}$ def. lineare Fortsetzung.

$(\varphi^+)^{(n)}$ ist positiv:

Sei $\pi : A^+ \to \mathbb{C}$ der kanonische *-Hom., dann ist auch $\pi^{(n)} : M_n(A^+) \to M_n$ *-Hom., also positiv.

Sei nun $0 \leq a + x \otimes 1_{A^+} \in M_n(A^+)$, $a \in M_n(A)$, $x \in M_n$.
[$a = a^*$ – warum? – $x \geq 0$]

z.z.: $(\varphi^+)^{(n)}(a + x \otimes 1_{A^+}) = \varphi^{(n)}(a) + \mu \cdot x \otimes 1_{B^+} \geq 0$.

[warum genau?]

Es genügt, dies für $a \in \tilde{F}(M_n(A))$ zu zeigen, da $\tilde{F}(M_n(A))_{s.a.} \subset M_n(A)_{s.a.}$ dicht liegt, $\varphi^{(n)}$ nach 3.6 beschränkt ist, und $M_n(B^+)_+ \subset M_n(B^+)$ abg. ist.
Dann können o.E. sogar annehmen, dass $e \in A_+$ ex. mit $\|e\| \leq 1$ und $\bar{e}\, a = a\, \bar{e} = a$, wo $\bar{e} = \begin{pmatrix} e & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e \end{pmatrix} = 1_n \otimes e$.

Wir erhalten

$$(\varphi^+)^{(n)}(a + x \otimes 1_{A^+}) = (\varphi^+)^{(n)}\big(\bar{e}(a + x \otimes 1_{A^+})\bar{e} + x \otimes (1_{A^+} - e^2)\big)$$

$$= \varphi^{(n)}\big(\underbrace{\bar{e}(a + x \otimes 1_{A^+})\bar{e}}_{\geq 0}\big) + \underbrace{\mu \cdot x \otimes 1_{B^+} - x \otimes \underbrace{\varphi(e^2)}_{\leq \|\varphi\| \cdot 1_{B^+} \leq \mu \cdot 1_{B^+}}}_{\geq 0}$$

≥ 0 $\square$

3.14 Prop.: Seien A, B C^*-Algebren und $\varphi: A \to B$ v.p.
Dann ist φ v.b. und es gilt
$$\|\varphi\|_{v.b.} = \|\varphi\| = \sup_\lambda \|\varphi(u_\lambda)\|, \quad (u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \subset A \text{ appr. Eins.}$$

Bew.: $\|\varphi(u_\lambda)\| \leq \|\varphi\| \leq \|\varphi\|_{v.b.}$ ist klar; z.z.: $\|\varphi\|_{v.b.} \leq \sup_\lambda \|\varphi(u_\lambda)\|$.
Sei also $a \in M_n(A)$, $\|a\| \leq 1$; $\bar{u}_\lambda := 1_{M_n} \otimes u_\lambda$.
Es gilt

$$0 \overset{3.8(i)}{\leq} \begin{pmatrix} 1_{A^\sim} & a \\ a^* & 1_{A^\sim} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow 0 \leq \begin{pmatrix} \bar{u}_\lambda^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & \bar{u}_\lambda^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1_{A^\sim} & a \\ a^* & 1_{A^\sim} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{u}_\lambda^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & \bar{u}_\lambda^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}$$

$$\overset{\varphi \text{ v.p.}}{\Rightarrow} 0 \leq \begin{pmatrix} \varphi^{(n)}(\bar{u}_\lambda) & \varphi^{(n)}(\bar{u}_\lambda^{\frac{1}{2}} a \bar{u}_\lambda^{\frac{1}{2}}) \\ \varphi^{(n)}(\bar{u}_\lambda^{\frac{1}{2}} a \bar{u}_\lambda^{\frac{1}{2}})^* & \varphi^{(n)}(\bar{u}_\lambda) \end{pmatrix}$$

$$\overset{3.8(ii)}{\Rightarrow} \underbrace{\|\varphi^{(n)}(\bar{u}_\lambda^{\frac{1}{2}} a \bar{u}_\lambda^{\frac{1}{2}})\|}_{\downarrow \lambda \ (\varphi^{(n)} \text{ beschränkt}) \ \ \|\varphi^{(n)}(a)\|} \leq \|\varphi^{(n)}(\bar{u}_\lambda)\| = \|\varphi(u_\lambda)\| \xrightarrow{\lambda} \sup_\lambda \|\varphi(u_\lambda)\|$$

$\square$

3.15 Bem.: Die Aussage gilt entsprechend falls A ein Operatorsystem ist.

3.16 Prop.: Sei A eine C^*-Algebra und $\varphi: A \to \mathbb{C}$ positiv. Dann ist φ v.p. Ebenso für $\varphi: X \to \mathbb{C}$ positiv, X Operatorsystem.

Bew.: Sei $0 \le (a_{ij})_{1,\dots,n} \in M_n(A)$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$.

$$\langle x, \varphi^{(n)}((a_{ij})_{ij}) x \rangle = \sum_{i,j=1}^{n} \varphi(a_{ij}) \bar{x}_i x_j = \varphi\Big(\underbrace{\sum_{i,j} a_{ij} \bar{x}_i x_j}_{\ge 0}\Big) \overset{\varphi \text{ pos.}}{\ge} 0$$

1-1 Eintrag von

$$0 \le \begin{pmatrix} \bar{x}_1 & \dots & \bar{x}_n \\ & 0 & \end{pmatrix} (a_{ij})_{1,\dots,n} \begin{pmatrix} x_1 & \\ \vdots & 0 \\ x_n & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Sigma & \dots & 0 \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$$

$\square$

3.17 Cor.: Sei $\varphi: A \to C_0(\Omega)$ positiv (Ω lok. kpt.) $\Rightarrow$ φ v.p. Ebenso für $\varphi: X \to C_0(X)$ pos. (X Operatorsystem)

Bew.: $\varphi^{(n)}((a_{ij})_{1,\dots,n}) \ge 0 \iff \varphi^{(n)}((a_{ij})_{1,\dots,n})(t) \ge 0$ für alle $t \in \Omega$.

Aber $\varphi^{(n)}(.)(t) = (\varphi(.)(t))^{(n)}: M_n(A) \to M_n$ ist positiv nach 3.16.

$\square$

3.18 <u>Prop.:</u> Sei Ω lok. kpt. Hausdorff und B ein C^*-Algebra.

Falls $\varphi : \mathcal{C}_0(\Omega) \to B$ positiv ist, so ist φ v.p.

Beweis: Sei $0 \le a \in M_n(\mathcal{C}_0(\Omega)) \cong M_n \otimes \mathcal{C}_0(\Omega) \cong \mathcal{C}_0(\Omega, M_n)$.

Zu $\varepsilon > 0$ ex. $0 \le f_1, \dots, f_k \in \mathcal{C}_0(\Omega)$, $0 \le a_1, \dots, a_k \in M_n$

mit $\| \sum_{i=1}^k a_i \otimes f_i - a \| < \varepsilon$.

[Warum?]

Dann gilt

$$\varphi^{(n)}(a) \geq \varphi^{(n)}\Big(\sum_{i=1}^k a_i \otimes f_i\Big) - \varepsilon \cdot \|\varphi^{(n)}\| \cdot 1_{(M_n \otimes B)^\sim}$$

$$= \sum_{i=1}^k \underset{\geq 0}{a_i} \otimes \underbrace{\varphi(f_i)}_{\geq 0} - \varepsilon \cdot \|\varphi^{(n)}\| \cdot 1_{(M_n \otimes B)^\sim}$$

$$\geq 0 - \varepsilon \cdot \|\varphi^{(n)}\| \cdot 1 .$$

$\Rightarrow \varphi^{(n)}(a) \geq 0$, denn $\varepsilon > 0$ war beliebig und $M_n(B)_+ \subset M_n(B)$ abg. $\square$

3.19 **Satz** (Stinespring): Sei A eine C^*-Algebra und $\varphi : A \to B(H)$ v.p.
Dann ex. ein Hilbertraum $\tilde{H}$, ein $*$-Hom.
$\pi : A \to B(\tilde{H})$ und ein $v \in B(H, \tilde{H})$ mit $\|\varphi\| = \|v\|^2$ und

$$\varphi(a) = v^* \pi(a) v \ , \quad a \in A,$$

d.h. φ ist Kompression eines $*$-Homomorphismus.
Falls A, φ unital sind, so ist v eine Isometrie.

Bew.: o.E. $\|\varphi\| = 1$ (sonst ersetze φ durch $\frac{1}{\|\varphi\|} \cdot \varphi$ und v durch $\|\varphi\|^{\frac{1}{2}} \cdot v$).
Nach Prop. 3.13 können wir φ fortsetzen zu $\varphi^+ : A^+ \to B(H)$ v.v.p.,
daher nehmen wir o.E. A, φ unital an.
Definiere $H' := A \odot H$ und eine symmetrische Bilinearform auf H' durch

$$\langle a \otimes \xi, b \otimes \eta \rangle := \langle \xi, \varphi(a^* b) \eta \rangle_H$$

für $a, b \in A$, $\xi, \eta \in H$.

φ v.p. $\Rightarrow$ $\langle \cdot, \cdot \rangle$ pos. semidefinit

$$\Big\langle \sum_{j=1}^n a_j \otimes \xi_j, \sum_{i=1}^n a_i \otimes \xi_i \Big\rangle = \Big\langle \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}, \underbrace{\varphi^{(n)}\Big(\underbrace{(a_j^* a_i)_{ij}}_{= \begin{pmatrix} a_1^* & \\ \vdots & 0 \\ a_n^* & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_n \\ & 0 & \end{pmatrix} \geq 0}\Big)}_{\geq 0} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} \Big\rangle_{H^{\oplus n}} \geq 0 \ , \quad a_i \in A, \ \xi_i \in H.$$

Setze $N := \{x \in \mathcal{X}' \mid \langle x, x\rangle = 0\}$.

Wegen $|\langle x, y\rangle|^2 \le |\langle x, x\rangle| \, |\langle y, y\rangle|$ (allg. richtig für symm. Bilinearformen)

gilt
$$N = \{x \in \mathcal{X}' \mid \langle x, y\rangle = 0 \text{ für alle } y \in \mathcal{X}'\},$$
und $N \subset \mathcal{X}'$ ist abg. UVR.

Setze $\tilde{\mathcal{X}} := \overline{\mathcal{X}'/_N}^{\langle .,. \rangle}$.

Definiere $\pi' : A \to L(\mathcal{X}')$ durch $\pi'(a)(\sum a_i \otimes f_i) := \sum a a_i \otimes f_i$.

Es gilt
$$(a_i^* a^* a a_j)_{i,j} = \begin{pmatrix} a_1^* & \\ \vdots & 0 \\ a_n^* & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^*a & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a^*a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_n \\ & 0 & \end{pmatrix} \le \|a^*a\| (a_i^* a_j)_{i,j}$$
in $M_n(A)$, und wir erhalten
$$\langle \pi'(a)(\sum a_i \otimes f_i), \pi'(a)(\sum a_i \otimes f_i)\rangle \le \|a\|^2 \langle \sum a_i \otimes f_i, \sum a_i \otimes f_i \rangle,$$
also $\|\pi'(a)\| \le \|a\|$ und $\pi'(a)(N) \subset N$.

$\Rightarrow \pi' : A \to B(\mathcal{X}')$ und π' induziert $\pi : A \to B(\tilde{\mathcal{X}})$;

π ist wieder $*$-Hom.

Definiere $v \in B(\mathcal{X}, \tilde{\mathcal{X}})$ durch $v(f) := 1_A \otimes f + N$. □

3.20 **Lemma:** Seien A, B C^*-Algebren und $\varphi : A \to B$ v.p. kontraktiv.

a) Für $x, y \in A$ gilt
$$\|\varphi(xy) - \varphi(x)\varphi(y)\| \le \|\varphi(xx^*) - \varphi(x)\varphi(x^*)\|^{\frac{1}{2}} \|y\|.$$

b) Für den multiplikativen Bereich
$$M := \{a \in A \mid \varphi(a^*a) = \varphi(a^*)\varphi(a), \ \varphi(aa^*) = \varphi(a)\varphi(a^*)\} \subset A$$
von φ gilt

(i) $M = \{a \in A \mid \varphi(ax) = \varphi(a)\varphi(x), \ \varphi(xa) = \varphi(x)\varphi(a) \text{ für alle } x \in A\}$

(ii) $M \subset A$ ist C^*-Unteralgebra

(iii) $\varphi|_M$ ist $*$-Hom.

Bew.: a) o.E. φ unital.

Nach Stinespring dürfen wir annehmen, dass φ von der Form $\varphi(.) = v^* \pi(.) v$ für eine $*$-Hom. π und eine Isometrie v.

$$\leadsto \|\varphi(xy) - \varphi(x)\varphi(y)\| = \|v^* \pi(x) \pi(y) v - v^* \pi(x) v v^* \pi(y) v\|$$
$$\leq \|v^* \pi(x) - v^* \pi(x) v v^*\| \, \|\pi(y) v\|$$
$$= \|v^* \pi(x) (1 - vv^*)^2 \pi(x^*) v\|^{\frac{1}{2}} \, \|\pi(y) v\|$$
$$= \|v^* \pi(x) (1 - vv^*) \pi(x^*) v\|^{\frac{1}{2}} \, \|\pi(y) v\|$$
$$\leq \|\varphi(xx^*) - \varphi(x)\varphi(x^*)\|^{\frac{1}{2}} \, \|y\|.$$

b) folgt direkt aus a). $\square$

3.21 <u>Lemma</u>: Seien A, B C^*-Algebren, $A \xrightarrow{\psi} B \xrightarrow{\varphi} A$ v.p. kontraktiv.

Dann gilt für $a \in A_+^1$, $b \in B$

$$\|\varphi(\psi(a)b) - \varphi\psi(a)\varphi(b)\| \leq 3^{\frac{1}{2}} \|b\| \cdot \Big(\underbrace{\max\big(\|\varphi\psi(a) - a\|, \|\varphi\psi(a^2) - a^2\|\big)}_{=:\eta}\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Bew.: Es gilt

$$0 \overset{3.10}{\leq} \varphi(\psi(a)^2) - (\varphi\psi(a))^2 \overset{3.10}{\leq} \varphi\psi(a^2) - \varphi\psi(a)^2 \leq 3 \cdot \eta \cdot 1,$$

also

$$\|\varphi(\underbrace{\psi(a)}_{x}\underbrace{b}_{y}) - \varphi(\psi(a))\varphi(b)\| \overset{3.20}{\leq} \|\varphi(\psi(a)^2) - \varphi\psi(a)^2\|^{\frac{1}{2}} \cdot \|b\| \leq (3\eta)^{\frac{1}{2}} \cdot \|b\|.$$

$\square$

3.22 Beispiel: Sei A eine C^*-Algebra.

Für $(a_1, \dots, a_n) \subset A$ ist $(a_i^* a_j)_{ij} \in M_n(A)$ positiv, und jedes $b \in M_n(A)_+$ lässt sich als Summe von n solchen Elementen schreiben.

Beweis: Sei $b = x^* x$ mit $x \in M_n(A)$.

Wir schreiben $x = x_1 + \dots + x_n$, wo $x_k = \begin{pmatrix} 0 \\ x_{k1} \cdots x_{kn} \\ 0 \end{pmatrix}$ - k-te Zeile.

Dann gilt $b = x^* x = \sum_{i,j} x_i^* x_j = \sum_k x_k^* x_k = \sum_{k=1}^n (x_{ki}^* x_{kj})_{ij}$

von der Form $(a_i^* a_j)_{ij} \geq 0$ $\square$

3.23 Satz: Sei B eine C^*-Algebra und $\varphi : M_n \to B$ linear.

Dann sind äquivalent:

(i) φ ist v.p.

(ii) φ ist n-positiv

(iii) $(\varphi(e_{ij}))_{ij}$ ist positiv in $M_n(B)$.

Beweis: (i) $\Rightarrow$ (ii) ✓

(ii) $\Rightarrow$ (iii): $(e_{ij})_{ij} = \begin{pmatrix} e_{11} & \\ \vdots & 0 \\ e_{n1} & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{11} \cdots e_{1n} \\ 0 \end{pmatrix} \in M_n(M_n)$ ist positiv.

(iii) $\Rightarrow$ (i): Übg.

3.24 Sei M ein Operatorraum (d.h. ein linearer Unterraum einer C^*-Algebra).

Zu $\varphi : M \to M_n$ linear assoziiere

$s_\varphi : M_n(M) \to \mathbb{C}$ linear durch

$$s_\varphi((a_{ij})_{ij}) := \frac{1}{n} \sum_{i,j} \varphi(a_{ij})_{ij}.$$

Zu $s : M_n(M) \to \mathbb{C}$ linear assoziiere

$\varphi_s : M \to M_n$ linear durch

$$\varphi_s(a)_{ij} := n \cdot s(a \otimes e_{ij}).$$

Die Abbildungen $\mathcal{L}(M, M_n) \underset{\varphi_s \mapsfrom s}{\overset{\varphi \mapsto s_\varphi}{\rightleftarrows}} \mathcal{L}(M_n(M), \mathbb{C})$

sind Inverse zueinander. [warum?]

φ unital $\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ s_φ unital [warum?]

3.25 <u>Satz</u>: Sei A eine C^*-Algebra und $\varphi: A \to M_n$ linear.

Dann sind äquivalent:

(i) φ ist v.p.

(ii) φ ist n-positiv.

(iii) s_φ ist positiv.

Ebenso für $\varphi: X \to M_n$ für ein Operatorsystem X.

Beweis: (i) $\Rightarrow$ (ii) ✓

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Für $\eta := \eta_1 \oplus \dots \oplus \eta_n \in \mathbb{C}^n \oplus \dots \oplus \mathbb{C}^n = \mathbb{C}^{n^2}$ gilt

$$s_\varphi((a_{ij})_{ij}) = \frac{1}{n} \cdot \langle \eta, \varphi^{(n)}((a_{ij})_{ij})\eta \rangle,$$

also $(a_{ij})_{ij} \geq 0 \overset{\varphi\ n\text{-positiv}}{\Longrightarrow} \varphi^{(n)}((a_{ij})_{ij}) \geq 0 \Rightarrow s_\varphi((a_{ij})_{ij}) \geq 0$.

(iii) $\Rightarrow$ (i): z.z.: $\varphi^{(m)}: M_m \otimes A \to M_m \otimes M_n = B(\underbrace{\mathbb{C}^n \oplus \dots \oplus \mathbb{C}^n}_{m})$ ist pos.

Wegen Prop. 3.22 genügt es, $\varphi^{(m)}((a_i^* a_j)_{i,j=1,\dots,m}) \geq 0$ zu zeigen.

Betrachte $\xi = \xi_1 \oplus \dots \oplus \xi_m \in \mathbb{C}^n \oplus \dots \oplus \mathbb{C}^n$ mit

$$\xi_j = \sum_{k=1}^n \lambda_{jk} \cdot \eta_k \in \mathbb{C}^n \quad (\eta_1, \dots, \eta_n \text{ Standardbasis}).$$

Setze $A_j = \begin{pmatrix} \lambda_{j,1}, \dots, \lambda_{j,n} \\ 0 \end{pmatrix}$,

so dass $A_i^* A_j = \sum_{k,l=1}^n \bar{\lambda}_{ik} \lambda_{jk} \cdot e_{kl}$

$$\langle \xi, \varphi^{(m)}((a_i^* a_j)_{ij})\xi \rangle = \sum_{i,j=1}^m \langle \xi_i, \varphi(a_i^* a_j)\xi_j \rangle = \sum_{i,j=1}^m \sum_{k,l=1}^n \bar{\lambda}_{ik} \lambda_{jl} \underbrace{\langle \eta_k, \varphi(a_i^* a_j)\eta_l \rangle}_{k,l\text{-Eintrag von } \varphi(a_i^* a_j)}$$

$$= \sum_{i,j=1}^m \sum_{k,l=1}^n \bar{\lambda}_{ik} \lambda_{jl} \cdot n \cdot s_\varphi(a_i^* a_j \otimes e_{kl})$$

$$= n \cdot \sum_{i,j=1}^m s_\varphi\Big(\sum_{k,l=1}^n \bar{\lambda}_{ik} \lambda_{jk} \cdot a_i^* a_j \otimes e_{kl} \Big) = n \cdot \sum_{i,j=1}^m s_\varphi(a_i^* a_j \otimes A_i^* A_j) \geq 0, \quad \square$$

3.26 Satz: Sei $B \subset A$ eine C^*-Unteralgebra und $\varphi: B \to M_n$ v.p. kontraktiv. Dann besitzt φ eine v.p. kontraktive Fortsetzung $\bar\varphi: A \to M_n$. Ebenso für ein Operatorsystem $X \subset A$ und $\varphi: X \to M_n$.

Bew.: o.E. $1 \in B \subset A$, φ unital. Dann ist $s_\varphi \in S(M_n(B))$; s_φ besitzt eine Fortsetzung $\bar s \in S(M_n(A))$. $\bar\varphi := \varphi_{\bar s}: A \to M_n$ setzt φ fort. $\square$

3.27 Satz (Arveson): Sei $B \subset A$ eine C^*-Unteralgebra und $\varphi: B \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ v.p. kontraktiv. Dann besitzt φ eine v.p. kontraktive Fortsetzung $\bar\varphi: A \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Ebenso für ein Operatorsystem $X \subset A$ und $\varphi: X \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$.

Bew. (Idee): Für Banachräume E, F betrachte $\varepsilon: E \odot F \to \mathcal{B}(E, F^*)^*$, $e \otimes f \mapsto (T \mapsto T(e)(f))$ und setze $Z := \varepsilon(E \odot F)$.
Dann ist $\mathcal{B}(E, F^*) \to Z^*$, $T \mapsto (\gamma \mapsto \gamma(T))$ ein isometr. Isomorphismus. [Warum?]

$\rightsquigarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}) = \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{H}) \cong \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{H}^*) \cong Y^*$ ist Dualraum,
ebenso wie $\mathcal{B}(A, \mathcal{B}(\mathcal{H})) \cong \mathcal{B}(A, Y^*) = V^*$.

$\rightsquigarrow \mathcal{B}(A, \mathcal{B}(\mathcal{H}))$ lässt sich mit w^*-Topologie ausstatten, der BW-Top.

Zeige: $CPC(A, \mathcal{B}(\mathcal{H})) := \{\psi: A \to \mathcal{B}(\mathcal{H}) \text{ v.p. kontraktiv}\} \underset{\text{BW-abg.}}{\subset} \mathcal{B}(A, \mathcal{B}(\mathcal{H}))_1$

$\Rightarrow CPC(A, \mathcal{B}(\mathcal{H}))$ ist BW-kpt. wegen Banach-Alaoglu.

Sei nun $\mathbb{C}^n \cong \tilde{\mathcal{F}} \subset \mathcal{H}$ ein endlichdimensionaler Unterraum;

setze $\varphi_{\tilde{\mathcal{F}}} := A_{\tilde{\mathcal{F}}} \circ \varphi : B \to p\,\mathcal{B}(\mathcal{H})_p \cong \mathcal{B}(\tilde{\mathcal{F}}) \cong M_n$.

Nach 3.26 besitzt $\varphi_{\tilde{\mathcal{F}}}$ v.p. kontraktive Fortsetzung

$\overline{\varphi}_{\tilde{\mathcal{F}}} : A \to \mathcal{B}(\tilde{\mathcal{F}}) \hookrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$.

$(\overline{\varphi}_{\tilde{\mathcal{F}}})_{\tilde{\mathcal{F}} \subset \mathcal{H} \text{ endl.dim}} \subset CPC(A, \mathcal{B}(\mathcal{H}))$ ist Netz ($\{\tilde{\mathcal{F}}\}$ ist gerichtet bzgl. Inklusion).

$CPC(A, \mathcal{B}(\mathcal{H}))$ kpt. $\Rightarrow (\overline{\varphi}_{\tilde{\mathcal{F}}})_{\tilde{\mathcal{F}} \subset \mathcal{H} \text{ endl.dim}}$ besitzt konvergentes Teilnetz mit Limes $\overline{\varphi}$.

$\overline{\varphi}$ setzt dann φ fort. [warum?] $\square$

3.28 Def.: Eine unitale C^*-Algebra C heißt injektiv, falls folgendes gilt:

Für ein Operatorsystem $X \subset A$ und ein ~~Operatorsystem~~ v.p. kontraktive Abb. $\varphi : X \to C$ existiert eine v.p. kontraktive Fortsetzung $\overline{\varphi} : A \to C$.

(Insbesondere ist $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ injektiv.)