5. Amenabilität

5.1 Def. (von Neumann): Eine diskrete Gruppe G heißt amenabel (oder mittelbar), falls ein Zustand $\mu \in S(\ell^\infty(G))$ existiert mit $\mu(f) = \mu(s \cdot f)$, wo $s \cdot f(\cdot) = f(s^{-1} \cdot)$, $f \in \ell^\infty(G)$, $s \in G$.

μ heißt linksinvariantes Mittel.

$$\left[(rs) \cdot f(t) = f((rs)^{-1} t) = f(s^{-1}(r^{-1}t)) = r \cdot (s \cdot f)(t) \right]$$

5.2 Def. Eine diskrete Gruppe G erfüllt die Følnerbedingung, falls für jede endliche Teilmenge $E \subset\subset G$ und jedes $\varepsilon > 0$ eine endliche Teilmenge $F \subset\subset G$ existiert mit

$$\max_{s \in E} \frac{|F \,\Delta\, sF|}{|F|} < \varepsilon,$$

wo $sF := \{st \mid t \in F\}$ und $F \Delta sF := F \cup sF \setminus F \cap sF$.

F heißt Følnermenge zu E und ε.

5.3 **Satz**: Für eine diskrete Gruppe G sind äquivalent:

(i) G ist amenabel.

(ii) G erfüllt die Følnerbedingung.

(iii) $C^*_r(G)$ ist nuklear.

Erinnerung: $C^*_r(G) \overset{\text{"}}{=} C^*(\lambda(G)) \subset \mathcal{B}(\ell^2(G))$, wo die linksreguläre Darstellung $\lambda : G \to \mathcal{U}(\mathcal{B}(\ell^2(G)))$ gegeben ist durch $\lambda_g(\eta_h) := \eta_{gh}$ $[\eta_g(t) = \delta_{gt}]$.

Wir haben $\ell^\infty(G) \hookrightarrow \mathcal{B}(\ell^2(G))$, und es gilt
$f \mapsto m_f$ (Multiplikationsoperator)

$m_{s.f} = \lambda_s m_f \lambda_{s^{-1}}$ [warum?].

Bew.: (i) $\Rightarrow$ (ii) (Idee): Sei $E \subset\subset G$ endlich und $\varepsilon > 0$.

Sei $\mu \in S(\ell^\infty(G))$ ein linksinvariantes Mittel.

Es gilt $\ell^\infty(G) = \ell^1(G)^*$ und $\ell^1(G) \underset{\substack{w^*\text{-dicht} \\ (\ell^{\infty *}, \ell^\infty)}}{\subseteq} \ell^1(G)^{**} = \ell^\infty(G)^*$.

$\Rightarrow \exists (\mu_\gamma)_\gamma \subset \ell^1(G)$ mit $\mu_\gamma \xrightarrow{w^*} \mu$.

Man kann $(\mu_\gamma)_\gamma \subset \ell^1(G)^1_+ =: \mathrm{Prob}(G)$ wählen.
[warum?]

Aber dann gilt für jedes $s \in E$

$$s \cdot \mu_\gamma - \mu_\gamma \xrightarrow{w^*} 0 \qquad [\text{warum?}]$$

$$\Rightarrow \quad s \cdot \mu_\gamma - \mu_\gamma \xrightarrow{w} 0 \qquad [\text{warum?}]$$

$$\Rightarrow 0 \in \bigcap_{s \in E} \overline{\left\{ s \cdot \mu' - \mu' \mid \mu' \in \mathrm{Prob}(G) \right\}}^{w}$$

$$= \bigcap_{s \in E} \overline{\underbrace{\left\{ \quad \text{---} \quad \right\}}_{\text{konvex}}}^{w}$$

$$\overset{\text{Hahn-Banach}}{=} \bigcap_{s \in E} \overline{\left\{ \quad \text{---} \quad \right\}}^{\|\cdot\|}$$

$$\Rightarrow \exists\, \bar{\mu} \in \mathrm{Prob}(G) : \sum_{s \in E} \| s \cdot \bar{\mu} - \bar{\mu} \|_1 < \varepsilon .$$

Setze $F_r := \{ g \in G \mid \bar{\mu}(g) > r \}$ für $r > 0$.

Für r genügend klein ist dann F_r Følnermenge zu E und ε.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Sei $E \subset\subset G$ endlich, $\varepsilon > 0$, und sei $F \subset\subset G$ endlich eine Følnermenge zu E, ε.

Sei $p_F \in B(\ell^2(G))$ die Projektion auf $\mathrm{span}\{\delta_g \mid g \in F\} (\subset \ell^2 G)$.

$$\rightsquigarrow p_F B(\ell^2(G)) p_F \cong M_F \left(\cong C^*\left(e_{g,h} \mid g,h \in F,\ e_{g,h}^* = e_{h,g},\ e_{g,h} e_{h,k} = e_{g,k} \right) \right).$$

Für $s \in G$ gilt

$$e_{g,g}\,\lambda_s\,e_{h,h} = \delta_{g,sh}\cdot e_{g,h} \qquad \left[\text{denn } \lambda_s(\eta_h) = \eta_{sh}\right]$$

und wegen $p_F = \sum_{g\in F} e_{g,g}$ gilt

$$p_F\,\lambda_s\,p_F = \sum_{g,h\in F} e_{g,g}\,\lambda_s\,e_{h,h} = \sum_{g,h\in F} \delta_{g,sh}\cdot e_{g,h} = \sum_{g\in F\cap sF} e_{g,s^{-1}g}.$$

$\left[\; g \in F,\ sh \in sF \Rightarrow h = s^{-1}g,\ g \in F\cap sF \;\right]$

Setze $\psi_F : C^*_r(G) \to M_F$

$$x \mapsto p_F\,x\,p_F$$

und $\varphi_F : M_F \to C^*_r(G)$

$$e_{g,h} \mapsto \frac{1}{|F|}\cdot\lambda_g\lambda_h^{-1},$$

dann sind ψ_F und φ_F unital (klar) und v.p.: ψ_F ist Kompression

$$\varphi_F^{(F)}\left(\left(e_{g,h}\right)_{g,h\in F}\right) = \begin{pmatrix} \vdots & \\ \lambda_g & 0 \\ \vdots & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sim\lambda_h^*\sim \\ 0 \end{pmatrix} \geq 0 \overset{3.23}{\Rightarrow} \varphi_F \text{ v.p.}$$

Es gilt $1 \geq \frac{|F\cap sF|}{|F|} = \frac{|F\cup sF|}{|F|} - \frac{|F\triangle sF|}{|F|} \overset{\text{s.Z., Følner}}{\geq} 1-\varepsilon$ und

wir erhalten für $s\in E$

$$\varphi_F\psi_F(\lambda_s) = \varphi_F\Big(\sum_{g\in F\cap sF} e_{g,s^{-1}g}\Big) = \sum_{g\in F\cap sF}\frac{1}{|F|}\cdot\lambda_g\lambda_{(s^{-1}g)^{-1}}$$

$$= \sum_{g\in F\cap sF}\frac{1}{|F|}\cdot\lambda_s = \frac{|F\cap sF|}{|F|}\cdot\lambda_s \approx_\varepsilon \lambda_s.$$

$\operatorname{span}\{\lambda_s\} \underset{\text{dicht}}{\subseteq} C^*_r(G) \Rightarrow$ Beh.

(iii) $\Rightarrow$ (i): $\Big(C^*_r(G) \xrightarrow{\psi_\gamma} F_\gamma \xrightarrow{\varphi_\gamma} C^*_r(G) \Big)_{\gamma\in\Gamma}$, $\varphi_\gamma, \psi_\gamma$ v.p. kontraktiv,

$\cap$ $\quad \tilde\psi_\gamma$

$B(\ell^2(G))$ [Arveson] $\qquad \varphi_\gamma \psi_\gamma \to \mathrm{id}_{C^*_r(G)}$ pktw.

$\rightsquigarrow \varphi_\gamma \tilde\psi_\gamma \in B(B(\ell^2(G)), C^*_r(G))_1 \subset B(B(\ell^2(G)), L(G))_1$

$\rightsquigarrow \varphi_\gamma \tilde\psi_\gamma$ besitzt w^*-Häufungspunkt $\qquad$ ist Dualraum (vgl. 3.27)

$\Phi : B(\ell^2(G)) \to L(G)$

[besitzt kanonische Spur τ, $\tau\big(\sum_{j\in G} \alpha_j \cdot \lambda_j\big) = \alpha_e$]

$\Phi|_{C^*_r(G)} = \mathrm{id}_{C^*_r(G)} \Rightarrow C^*_r(G)$ ist im mult. Bereich Φ

$\Rightarrow$ für $f\in \ell^\infty(G)$, $s\in G$ gilt

$$\tau\circ\Phi(m_{s.f}) = \tau\circ\Phi(\lambda_s m_f \lambda_{s^{-1}})$$
$$= \tau(\lambda_s \Phi(m_f)\lambda_{s^{-1}})$$
$$= \tau(\Phi(m_f))$$

$\Rightarrow f \mapsto \tau\circ\Phi(m_f)$ ist invariantes Mittel. $\square$

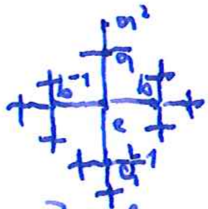
S.4.7. Bsp.: (i) $G = \mathbb{Z}$

$F_n := [-n, n] \cap \mathbb{Z}$ bilden Følnermengen.

$\mu(f) := \lim_{\omega} \frac{1}{|F_n|} \cdot \sum_{n \in F_n} f(n)$ für $\omega \in \beta\mathbb{Z} \setminus \mathbb{Z}$ ein freier Ultrafilter, dann ist $\mu \in S(\ell^\infty(\mathbb{Z}))$ invariantes Mittel.

(ii) $G = \mathbb{F}_2 = \{$ reduzierte Wörter in $a, b, a^{-1}, b^{-1} \} \cup \{e\}$ „leeres Wort"
die freie Gruppe mit 2 Erzeugern.

Cayley Graph:



$\mathbb{F}_2$ besitzt eine paradoxe Zerlegung!

$$\mathbb{F}_2 = \underbrace{\{a \ldots\} \sqcup \{a^{-1} \ldots\}} \sqcup \underbrace{(\{b \ldots\} \setminus \{e, b, b^2, \ldots\}) \sqcup (\{b^{-1} \ldots\} \cup \{e, b, b^2, \ldots\})}$$

$$= \{a \ldots\} \sqcup a\{a^{-1} \ldots\}$$

$$= b^{-1}(\{b \ldots\} \setminus \{e, b, b^2, \ldots\}) \sqcup (\{b^{-1} \ldots\} \cup \{e, b, b^2, \ldots\})$$

$\rightsquigarrow$ $\mathbb{F}_2$ besitzt <u>kein</u> invariantes Mittel.

$\mathbb{F}_2 \subset SO(3)$ $\rightsquigarrow$ Banach-Tarski Paradoxon: $\bigcirc \rightsquigarrow \bigcirc\bigcirc$