6. Die K_0-Gruppe einer unitalen C^*-Algebra

6.1 Def.: Für eine C^*-Algebra A und $n \in \mathbb{N}$ setzen wir
$P_n(A) := P(M_n(A))$ $\left(= \{\text{Projektionen in } M_n(A)\}\right)$
und $P_\infty(A) := \bigsqcup_{n=1}^{\infty} P_n(A)$.
Für $p, q \in P_\infty(A)$ $(p \in P_n(A),\ q \in P_m(A))$
schreiben wir $p \sim_0 q$ falls $v = (v_{ij})_{ij} \in M_{m,n}(A)$
existiert mit $p = v^*v$, $q = vv^*$.
(Dabei ist $v^* := (v_{ji}^*)_{ji} \in M_{n,m}(A)$.)
Definiere $\oplus : P_\infty(A) \times P_\infty(A) \to P_\infty(A)$

durch $\quad p \oplus q := \operatorname{diag}(p, q) = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix}$,

d. h. für p, q wie oben ist $p \oplus q \in M_{n+m}(A)$.

6.2 Prop.: a) $\sim_0$ ist eine Äquivalenzrelation auf $P_\infty(A)$.

b) Für $p, q, r, p', q' \in P_\infty(A)$ gilt

(i) $p \sim_0 p \oplus 0_n$, $n \in \mathbb{N}$
(ii) Falls $p \sim_0 p'$, $q \sim_0 q'$, so gilt $p \oplus q \sim_0 p' \oplus q'$.
(iii) $p \oplus q \sim_0 q \oplus p$
(iv) Falls $p, q \in P_n(A)$ orthogonal sind $(pq = 0)$, so ist $p + q \in P_n(A)$ und es gilt $p + q \sim_0 p \oplus q$.
(v) $(p \oplus q) \oplus r = p \oplus (q \oplus r)$.

Bew.: a) $p \sim_0 q \sim_0 r$, $p = v^*v$, $q = vv^* = w^*w$, $r = ww^*$

$\Rightarrow p \sim_0 r$, denn $(wv)^*wv = v^*w^*wv = v^*qv = v^*v = p$

ebenso $wv(wv)^* = r$

$\Rightarrow \sim_0$ transitiv.

$\sim_0$ symmetrisch: $v \mapsto v^*$

$\sim_0$ reflexiv: $v = p$.

b) (i) Sei $p \in P_n(A)$. Mit $v = \begin{pmatrix} p \\ 0 \end{pmatrix} \in M_{n+k,n}(A)$ gilt

$$vv^* = \begin{pmatrix} p \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in P_{n+k,n+k}(A),$$

$$v^*v = \begin{pmatrix} p & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p \\ 0 \end{pmatrix} = p \in P_n(A).$$

(ii) Benutze $u = \begin{pmatrix} v & 0 \\ v & w \end{pmatrix}$.

(iii) Benutze $u = \begin{pmatrix} 0 & q \\ p & 0 \end{pmatrix}$.

(iv) Benutze $u = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \in M_{2,1}(A)$, denn

$$u^*u = p + pq + qp + q = p + q,$$

$$uu^* = \begin{pmatrix} p & pq \\ qp & q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix} = p \oplus q.$$

(v) trivial.

6.3 Def./Prop.: Für eine C^*-Algebra A setzen wir $D(A) := P_\infty(A)/\sim_0$ und schreiben $[p]_D$ für die Äquivalenzklasse von $p \in P_\infty(A)$.
Wir definieren eine Addition $+$ auf $D(A)$ durch

$$[p]_D + [q]_D := [p \oplus q]_D .$$

Die Operation ist wohldefiniert und $(D(A), +)$ ist eine abelsche Halbgruppe.

Beweis: Folgt aus Prop. 6.2 a) und b) (i), (ii), (iii), (v). $\square$

6.4 Erinnerung: Sei $(S,+)$ eine abelsche Halbgruppe.
Wir definieren eine Äquivalenzrelation $\sim$ auf $S \times S$ durch $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) :\Leftrightarrow \exists z \in S: x_1 + y_2 + z = x_2 + y_1 + z$.
Wir schreiben $\langle x, y \rangle$ für die Klasse von (x,y) in $\mathrm{Groth}(S) := S \times S/\sim$.
Definiere eine Addition auf $\mathrm{Groth}(S)$ durch

$$\langle x_1, y_1 \rangle + \langle x_2, y_2 \rangle := \langle x_1 + x_2, y_1 + y_2 \rangle ;$$

$(\mathrm{Groth}(S), +)$ ist dann eine abelsche Gruppe.

Zu $\bar{y} \in S$ beliebig betrachte die Abbildung

$$\begin{aligned} \gamma_S : S &\to \mathrm{Groth}(S) \\ x &\mapsto \langle x + \bar{y}, \bar{y} \rangle, \end{aligned}$$

dann hängt γ_S nicht von der Wahl von $\bar{y}$ ab [warum?].

Es gilt $\mathrm{Groth}(S) = \{ \gamma_S(x) - \gamma_S(y) \mid x, y \in S \}$.

γ_S ist injektiv genau dann wenn S die Kürzungseigenschaft besitzt, d.h. $x+z = y+z \Rightarrow x = y$.

$\mathrm{Groth}(.)$ ist ein Funktor bzgl. additiven Abbildungen:

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\gamma_S"'] & T \arrow[d, "\gamma_T"] \\ \mathrm{Groth}(S) \arrow[r, "\mathrm{Groth}(f)"'] & \mathrm{Groth}(T) \end{tikzcd}$$

Gruppenhom.

Universelle Eigenschaft

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "f", "\text{additiv}"'] \arrow[d, "\gamma_S"'] & G \\ \mathrm{Groth}(S) \arrow[ur, dotted, "\exists!"'] & \end{tikzcd}$$

G – abelsche Gruppe

$\exists!$ Gruppenhom.

6.5 Def.: Sei A eine unitale C^*-Algebra.

Wir definieren $K_0(A) := \mathrm{Groth}(\mathcal{D}(A))$.

Für $p \in P_\infty(A)$ schreiben wir $[p]_0 := \gamma_{\mathcal{D}(A)}([p]_{\mathcal{D}}) \in K_0(A)$.

6.6 Prop.: Sei A eine unitale C^*-Algebra. Dann gilt:

(i) $K_0(A) = \{[p]_0 - [q]_0 \mid p, q \in P_\infty(A)\}$.

(ii) $[p \oplus q]_0 = [p]_0 + [q]_0$, $p, q \in P_\infty(A)$.

(iii) $[0_A]_0 = 0_{K_0(A)}$.

(iv) Falls $p \perp q \in P_n(A)$, so gilt $[p+q]_0 = [p]_0 + [q]_0$.

Außerdem erfüllt $K_0(A)$ folgende universelle Eigenschaft:

Sei G eine abelsche Gruppe und $\nu : P_\infty(A) \to G$ eine Abbildung mit

a) $\nu(p \oplus q) = \nu(p) + \nu(q)$, $p, q \in P_\infty(A)$

b) $\nu(0_A) = 0_G$

c) $p \sim_0 q \Rightarrow \nu(p) = \nu(q)$.

Dann ex. genau ein Gruppenhom. $\alpha : K_0(A) \to G$ so dass

$$\begin{tikzcd} P_\infty(A) \arrow[d, "{[\cdot]_0}"'] \arrow[dr, "\nu"] & \\ K_0(A) \arrow[r, "\alpha"'] & G \end{tikzcd}$$

kommutiert.

Beweis: klar.

6.7 **Def.:** Sei A eine C^*-Algebra.

(i) $p, q \in P_\infty(A)$ heißen stabil äquivalent, $p \sim_s q$, falls $r \in P_\infty(A)$ existiert mit $p \oplus r \sim_0 q \oplus r$.

(ii) $p, q \in P_n(A)$ heißen homotop, $p \sim_h q$, falls $\phi : [0,1] \to P_n(A)$ stetig existiert mit $\phi(0) = p$, $\phi(1) = q$.

$\sim_s$ und $\sim_h$ sind Äquivalenzrelationen [warum?].

6.8 **Prop.:** Sei A eine unitale C^*-Algebra.

(i) Für $p, q \in P_\infty(A)$ gilt

$p \sim_s q \iff p \oplus 1_m \sim_0 q \oplus 1_m$ für ein $m \in \mathbb{N} \iff [p]_0 = [q]_0$.

(ii) Für $p, q \in P(A)$ gilt

$p \sim_h q \Rightarrow [p]_0 = [q]_0$.

(iii) Für $p, q \in P_n(A)$ gilt

$p \sim_0 q \Rightarrow \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \sim_h \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ in $P_{2n}(A)$

(iv) Für $p, q \in P_n(A)$ gilt $p \sim_u q \Rightarrow \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \sim_h \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ in $P_{2n}(A)$.

Bew. (i) $p \sim_s q \Rightarrow p \oplus r \sim_0 q \oplus r$ für ein $r \in P_m(A)$

$$\overset{6.4}{\Rightarrow} p \oplus r \oplus (1-r) \sim_0 q \oplus r \oplus (1-r)$$

$\wr_0$ 6.6(iv) $\qquad$ 6.6(iv) $\wr_0$

$$p \oplus 1_m \qquad\qquad q \oplus 1_m$$

$$\overset{6.4}{\Rightarrow} [p]_0 = [q]_0$$

$$\overset{6.14}{\Rightarrow} [p]_D + [e]_D = [q]_D + [e]_D \text{ für ein } e \in P_k(A)$$

$$\Rightarrow p \oplus e \sim_0 q \oplus e \text{ für ein } e \in P_k(A).$$

$$\Rightarrow p \sim_s q$$

(ii) $p \sim_h q \Rightarrow \exists\, p_0, \dots, p_l \in P_n(A)$ $\|p_l - p_{l+1}\| < \frac{1}{2}$.

$\Rightarrow$ Darf o.E. $\|p-q\| < \frac{1}{2}$ annehmen.

Setze $z := pq + (1-p)(1-q)$,

dann gilt $pz = pq = zq$ und

$$\|z - 1_n\| = \|p(q-p) + (1-p)((1-q)-(1-p))\|$$

$$= \|p(q-p) + (1-p)(p-q)\|$$

$$\leq 2\|p-q\|$$

Neumann Reihe < 1

$\Rightarrow z$ invertierbar

$\Rightarrow z = u|z|$ für ein $u \in U(M_n(A))$;

es gilt $|z|$ invertierbar

Dann gilt $q = z^{-1} z q = z^{-1} p z = |z|^{-1} u^* p u |z|$ $\quad (*)$

$$\overset{q=q^*}{=} \left(|z|^{-1} u^* p u |z|\right)^* = |z| u^* p u |z|^{-1}$$

$$\Rightarrow |z|^2 u^* p u |z|^{-1} = u^* p u$$

$$\Rightarrow [|z|^2, u^* p u] = 0$$

$$\Rightarrow [|z|, u^* p u] = 0$$

$$\overset{(*)}{\Rightarrow} q = u^* p u$$

$$\Rightarrow q \sim_u p$$

$$\Rightarrow q \sim_0 p.$$

(iii) Sei $v \in M_n(A)$ mit $p = v^* v$, $q = v v^*$.

Dann gilt $u := \begin{pmatrix} v & 1-q \\ 1-p & v^* \end{pmatrix}$, $w := \begin{pmatrix} q & 1-q \\ 1-q & q \end{pmatrix} \in \mathcal{U}(M_{2n}(A))$

sowie $wu \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} u^* w^* = w \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} w^* = \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, also $\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \sim_u \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(iv) Für $t \in [0,1]$ setze $R_t := \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{2} t & \sin \frac{\pi}{2} t \\ -\sin \frac{\pi}{2} t & \cos \frac{\pi}{2} t \end{pmatrix} \in \mathcal{U}(M_2)$.

Falls $u \in \mathcal{U}_0(M_n(A))$ mit $u^* p u = q$, so gilt

$$\begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^* & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (R_0 \otimes 1_n) \begin{pmatrix} u^* & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} (R_0^* \otimes 1) \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} (R_0 \otimes 1_n) \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} (R_0^* \otimes 1_n)$$

$$\sim_h (R_1 \otimes 1_n) \begin{pmatrix} u^* & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} (R_1^* \otimes 1) \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} (R_1 \otimes 1_n) \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} (R_1^* \otimes 1_n)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

∎

6.9 <u>Bem.</u> (i) Der Beweis von 6.8(iii) funktioniert auch mit $A^\sim$ falls A nicht unital ist.

(ii) Es gilt: $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0: \ p, q \in \mathcal{P}(A), \ \|p - q\| < \delta$

$$\Rightarrow \exists\, u \in \mathcal{U}(A^\sim): u p u^* = q, \ \|u - 1\| < \varepsilon.$$

Die Abhängigkeit $\delta(\varepsilon)$ lässt sich explizit angeben.

6.10 <u>Cor.</u>: In der universellen Eigenschaft von Prop. 6.6 kann man c) ersetzen durch

c') $p, q \in \mathcal{P}_n(A), \ p \sim_h q \Rightarrow \nu(p) = \nu(q)$.

[bzw. $p \sim_s q$]

Bew.: Falls $p, q \in \mathcal{P}_\infty(A)$ mit $p \sim_0 q$, so ex. $k, k', k'' \in \mathbb{N}$ mit $p' := p \oplus 0_{k'} \sim_0 p \sim_0 q \sim_0 q \oplus 0_{k''} =: q'$ und $p', q' \in \mathcal{P}_k(A)$.

$$\overset{\text{Prop. 6.8(iii),(iv)}}{\Longrightarrow} \quad p' \oplus 0_{3k} \sim_h q' \oplus 0_{3k}$$

$$\Rightarrow \nu(p) \overset{b)}{=} \nu(p) + \underbrace{\nu(0) + \ldots + \nu(0)}_{k' + 3k} \overset{a)}{=} \nu(p \oplus 0_{k'} \oplus 0_{3k})$$

$$\overset{a)}{=} \nu(p' \oplus 0_{3k}) \overset{c')}{=} \nu(q' \oplus 0_{3k}) = \ldots = \nu(q).$$

$\Rightarrow \beta: \mathcal{D}(A) \to G, \ \beta([p]_D) := \nu(p)$ ist wohldefiniert.

Rest wie in 6.6: Additivität von β folgt aus a); α existiert nach 6.4 (u. E. von Groth(.)). $\square$

6.11 Seien A, B unitale C^*-Algebren und $\varphi: A \to B$ ein *-Hom.
Dann induziert φ eine Abbildung $\varphi^{(\infty)}: P_\infty(A) \to P_\infty(B)$
$\varphi^{(\infty)}|_{P_n(A)} := \varphi^{(n)}|_{P_n(A)}$, $n \in \mathbb{N}$;
außerdem gilt für $p, q \in P_\infty(A)$

$$p \sim_h q \Rightarrow \varphi^{(\infty)}(p) \sim_h \varphi^{(\infty)}(q)$$ [warum?].

Definiere $\nu: P_\infty(A) \to K_0(B)$ durch $\nu(p) := [\varphi(p)]_0$, $p \in P_\infty(A)$.
Dann erfüllt ν 6.6 a), b) und 6.10 c'), also ex. genau ein Gruppenhom. $K_0(\varphi): K_0(A) \to K_0(B)$ so dass

$$\begin{tikzcd}
P_\infty(A) \arrow[r, "\varphi^{(\infty)}"] \arrow[d, "{[\,.\,]_0}"'] & P_\infty(B) \arrow[d, "{[\,.\,]_0}"] \\
K_0(A) \arrow[r, "K_0(\varphi)"] & K_0(B)
\end{tikzcd}$$

kommutiert. Wir schreiben auch φ_* bzw. φ_0 für $K_0(\varphi)$.

<u>Prop.</u>: Seien A, B, C unitale C^*-Algebren und $\varphi: A \to B$, $\psi: B \to C$ *-Hom. Dann gilt

(i) $K_0(id_A) = id_{K_0(A)}$
(ii) $K_0(\psi \circ \varphi) = K_0(\psi) \circ K_0(\varphi)$
(iii) $K_0(0_{A \to B}) = 0_{K_0(A) \to K_0(B)}$.

Insbesondere ist K_0 ein kovarianter Funktor $(C^*Alg, {}^*Hom) \to (Ab, Hom)$.
unitale C^*-Algebren abelsche Gruppen
Lässt man $\{0\} \in C^*Alg^1$ zu, so gilt $K_0(\{0\}) = \{0\}$.

Beweis. Wegen $K_0(\varphi)([p]_0) = [\varphi^{(\infty)}(p)]_0$, $p \in P_\infty(A)$, gilt $K_0(\mathrm{id}_A)([p]_0) = [p]_0$ und $K_0(\psi \circ \varphi)([p]_0) = K_0(\psi) \circ K_0(\varphi)([p]_0)$.

Wegen $K_0(A) = \{[p]_0 - [q]_0 \mid p, q \in P_\infty(A)\}$ [6.6(i)] gilt dann (i) und (ii); (iii) folgt mit $[0_A]_0 = 0_{K_0(A)}$ [6.6(iii)].

$K_0(\{0\}) = \{0\}$: $P_n(\{0\}) = \{0_n\}$, wo $0_n := 0_{M_n(\{0\})}$.

Aber $0_n \sim_0 0_m$, also ist $D(\{0\}) = \{[0_1]_D\} \cong \{0\}$ als abelsche Halbgruppe und $K_0(\{0\}) = \mathrm{Groth}(\{0\}) = \{0\}$. ∎

6.12 **Def.**: Seien A, B C^*-Algebren. Zwei *-Homomorphismen $\varphi, \psi : A \to B$ heißen homotop, $\varphi \sim_h \psi$, falls es *-Hom. $\varphi_t : A \to B$, $t \in [0,1]$ gibt mit $\varphi_0 = \varphi$, $\varphi_1 = \psi$, und so dass $t \mapsto \varphi_t(a)$ stetig ist für jedes $a \in A$.

Äquivalent: Es existiert ein *-Hom. $\gamma : A \to C([0,1], B)$ mit

$$\varphi = ev_0 \circ \gamma, \quad \psi = ev_1 \circ \gamma.$$

A und B heißen homotopieäquivalent, falls *-Hom. $\varphi : A \to B$, $\sigma : B \to A$ existieren mit $\sigma \circ \varphi \sim_h \mathrm{id}_A$, $\varphi \circ \sigma \sim_h \mathrm{id}_B$.

Wir sagen auch A und B sind homotopieäquivalent via $A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\sigma} A$.

6.13 <u>Prop.:</u> Seien A, B unitale C^*-Algebren.

(i) Für $\varphi, \psi : A \to B$, *-Hom gilt $\varphi \sim_h \psi \Rightarrow K_0(\varphi) = K_0(\psi)$.

(ii) Falls A, B homotopieäquivalent sind via $A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\sigma} A$, so sind $K_0(\varphi)$ und $K_0(\sigma)$ zueinander inverse Isomorphismen zwischen $K_0(A)$ und $K_0(B)$.

Beweis: (i) Sei $\varphi_t : A \to B$, $t \in [0,1]$ ein punktweise stetiger Pfad von *-Homomorphismen mit $\varphi_0 = \varphi$, $\varphi_1 = \psi$.

$\rightsquigarrow \varphi_t^{(n)} : M_n(A) \to M_n(B)$, $t \in [0,1]$ ist punktweise stetig für jedes n

$\rightsquigarrow$ Für $p \in P_n(A)$ ist $t \mapsto \varphi_t(p)$ stetig, so dass $\varphi(p) = \varphi_0(p) \sim_h \varphi_1(p) = \psi(p)$

$\Rightarrow K_0(\varphi)([p]_0) \overset{6.11}{=} [\varphi^{(n)}(p)]_0 \overset{6.8(ii)}{=} [\psi^{(n)}(p)]_0 = K_0(\psi)([p]_0)$

$\overset{6.6(i)}{\Rightarrow} K_0(\varphi) = K_0(\psi)$.

(ii) Folgt aus (i) mit Prop. 6.11 (ii), (iii). □

6.14 <u>Prop.:</u> Seien A, B unitale C^*-Algebren und $\varphi, \psi : A \to B$ *-Hom. Falls $\varphi \perp \psi$, d.h. $\varphi(a)\psi(a') = 0$ für alle $a, a' \in A$ (äquivalent: $\varphi(1_A)\psi(1_A) = 0$), so ist $\varphi + \psi : A \to B$ ein *-Homomorphismus und es gilt $K_0(\varphi + \psi) = K_0(\varphi) + K_0(\psi)$.

Bew.: $\varphi+\psi$ ist Hom.: klar, ebenso für $\varphi^{(n)}+\psi^{(n)}$.

Es folgt für $p \in P_n(A)$

$$\begin{aligned} K_0(\varphi+\psi)([p]_0) &= [(\varphi+\psi)^{(n)}(p)]_0 \\ &= [(\varphi^{(n)}+\psi^{(n)})(p)]_0 \\ &= [\varphi^{(n)}(p)+\psi^{(n)}(p)]_0 \\ &\overset{6.6(iv)}{=} [\varphi^{(n)}(p)]_0 + [\psi^{(n)}(p)]_0 \\ &= K_0(\varphi)([p]_0) + K_0(\psi)([p]_0) \end{aligned}$$

$$\overset{6.6(i)}{\Rightarrow} K_0(\varphi+\psi) = K_0(\varphi)+K_0(\psi).$$

∎

6.15 Prop.: Sei A eine unitale C^*-Algebra. Dann induziert die zerfallende exakte Sequenz

$$0 \to A \xrightarrow{\iota} A^+ \underset{\overset{\curvearrowleft}{\sigma}}{\xrightarrow{\pi}} \mathbb{C} \to 0 \quad [\text{wobei } \sigma(1_{\mathbb{C}}) = 1_{A^+}]$$

eine zerfallende exakte Sequenz

$$0 \to K_0(A) \xrightarrow{K_0(\iota)} K_0(A^+) \underset{\overset{\curvearrowleft}{K_0(\sigma)}}{\xrightarrow{K_0(\pi)}} K_0(\mathbb{C}) \to 0. \quad (*)$$

Bew.: Betrachte die *-Hom. $\mu: A^+ \to A$, $x \mapsto 1_A x 1_A$ und $\lambda: \mathbb{C} \to A^+$, $\alpha \mapsto \alpha(1_{A^+} - 1_A)$.

Dann gilt $id_A = \mu\circ\iota$, $id_{A^+} = \iota\circ\mu + \lambda\circ\pi$, $\pi\circ\iota = 0_{A\to\mathbb{C}}$, $\pi\circ\sigma = id_{\mathbb{C}}$ und somit

$0 = K_0(0_{A\to\mathbb{C}}) = K_0(\pi\circ\iota) = K_0(\pi)\circ K_0(\iota)$ $\Rightarrow$ $\operatorname{im} K_0(\iota) \subset \ker K_0(\pi)$

$id_{K_0(\mathbb{C})} = K_0(id_{\mathbb{C}}) = K_0(\pi\circ\sigma) = K_0(\pi)\circ K_0(\sigma)$ $\Rightarrow$ $K_0(\pi)$ surjektiv, (*) zerfällt

$id_{K_0(A)} = K_0(id_A) = K_0(\mu\circ\iota) = K_0(\mu)\circ K_0(\iota)$ $\Rightarrow$ $K_0(\iota)$ injektiv

$id_{K_0(A^+)} = K_0(\iota)\circ K_0(\mu) + K_0(\lambda)\circ K_0(\pi)$ $\Rightarrow$ $\ker K_0(\pi) \subset \operatorname{im} K_0(\iota)$.

∎

6.16 <u>Prop.</u>: Sei A ein unitale C^*-Algebra und $\tau \in T(A)$ ein positives Spurfunktional. Dann definiert

$$\tau_* : K_0(A) \to \mathbb{R}$$
$$[p]_0 \mapsto (Tr_{M_n} \otimes \tau)(p), \quad p \in M_n \otimes A$$

ein Gruppenhom. mit $\tau_* \gamma_D (D(A)) \subset \mathbb{R}_+$ und $\tau_*([1_A]_0) = \|\tau\|$.

Bew.: $Tr_{M_n} \otimes \tau$ ist ein positives Spurfunktional (mit Norm $n \cdot \|\tau\|$) auf $M_n \otimes A$.

Nach 6.8(ii) gilt $p \sim_0 q \Rightarrow p \sim_u q \Rightarrow (Tr_{M_n} \otimes \tau)(p) = (Tr_{M_n} \otimes \tau)(q)$

$$\Rightarrow \nu : P_\infty(A) \to \mathbb{R}$$
$$p \mapsto (Tr_{M_n} \otimes \tau)(p)$$

erfüllt 6.10 c).

ν erfüllt aber auch 6.6 a), b)

$$\overset{\text{Cor 6.10}}{\Rightarrow} \quad \begin{array}{ccc} P_\infty(A) & & \\ {\scriptstyle [\,.\,]_0}\downarrow & \searrow^{\nu} & \\ K_0(A) & \underset{\exists!\,\tau_*}{\dashrightarrow} & \mathbb{R} \end{array}$$

Rest ist klar. □

6.17 z.B.: $K_0(M_n) \cong \mathbb{Z}$:

Für $p, q \in P_\infty(M_n)$ gilt: $\cdot\, p \sim_0 q \iff \mathrm{rk}\, p = \mathrm{rk}\, q$

$\cdot\, \forall r \in \mathbb{N}\ \exists p \in M_k(M_n): \mathrm{rk}\, p = r$

$\Rightarrow$
$$\begin{aligned} \mathbb{N} &\to D(M_n) \\ 0 &\mapsto [0]_D \\ 1 &\mapsto [e_{11}]_D \end{aligned}$$
ist ein Isomorphismus von Halbgruppen.

$\mathrm{Groth}(\mathbb{N}) \cong \mathbb{Z} \Rightarrow K_0(M_n) = \mathrm{Groth}(D(M_n)) \cong \mathbb{Z}$.

Es gilt

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[rr, bend left, "\mathrm{id}_{\mathbb{Z}}"] & K_0(M_n) \arrow[r, "\mathrm{Tr}_*"] & \mathbb{Z} \end{tikzcd}.$$

$1 \mapsto [e_{11}]_0$

6.18 z.B.: Sei $\mathcal{H}$ ein unendlichdimensionaler Hilbertraum. Dann gilt $K_0(B(\mathcal{H})) = 0$.

Bew. für $\mathcal{H}$ separabel: $M_n(B(\mathcal{H})) \cong B(\mathcal{H}^{\oplus n})$

$\leadsto \gamma: P_\infty(B(\mathcal{H})) \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ ← abelsche Halbgruppe

$p \mapsto \dim(p(\mathcal{H}^{\oplus n}))$

Für $p, q \in M_n(B(\mathcal{H}))$ gilt: $\gamma(p) = \gamma(q) \iff p \sim_{MvN} q$.

Für $p \in M_n(B(\mathcal{H})),\ q \in M_m(B(\mathcal{H})),\ m \leq n$, gilt: $p \sim_0 q \iff p \sim_{MvN} q \oplus 0_{n-m}$.

Weiter gilt $\gamma(p \oplus q) = \gamma(p) + \gamma(q)$ (Dimension ist additiv).

$\Rightarrow \gamma$ induziert ein Halbgruppenisomorphismus $\bar{\gamma}: D(B(\mathcal{H})) \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

$[p]_D \mapsto \gamma(p)$

$\Rightarrow K_0(B(\mathcal{H})) = \mathrm{Groth}(D(B(\mathcal{H}))) \cong \mathrm{Groth}(\mathbb{N} \cup \{\infty\}) \cong \{0\}$.

[warum?]

6.19 Z.B.: Sei X ein kontrahierbarer kompakter Hausdorffraum, d.h. es gibt $x_0 \in X$ und $h:[0,1]\times X \to X$ stetig mit $h(1,x) = x$, $h(0,x) = x_0$, $x \in X$.

Dann gilt $K_0(C(X)) \cong \mathbb{Z}$:

$C(X)$ und $\mathbb{C}$ sind homotopieäquivalent via

$C(X) \underset{ev_{x_0}}{\xrightarrow{g}} \mathbb{C} \underset{\lambda \mapsto \lambda \cdot 1_X}{\xrightarrow{\sigma}} C(X)$, denn $g \circ \sigma = id_{\mathbb{C}}$

und $\sigma \circ g \sim_h id_{C(X)}$: $\varphi_t : C(X) \to C(X)$, $f(\cdot) \mapsto f \circ h(t, \cdot)$

ist für festes f stetig in t;

$\varphi_0 = \sigma \circ g$, $\varphi_1 = id_{C(X)}$

$\overset{6.13(vi)}{\Rightarrow} K_0(C(X)) \cong K_0(\mathbb{C}) \overset{6.14}{\cong} \mathbb{Z}$.