
Aufgabe 1:
Seien A, B C*-Algebren und $\varphi \in S(A)$ ein Zustand. Sei $\varphi \otimes \mathrm{id}_B : A \odot B \longrightarrow \mathbb{C} \odot B = B$ die "slice map".
Man zeige: $\varphi \otimes \mathrm{id}_B$ ist kontraktiv bzgl. $\| \, . \, \|_{\min}$ und für $x \in A \odot B$ gilt

$$\varphi \otimes \mathrm{id}_B(x^*)\varphi \otimes \mathrm{id}_B(x) \leq \varphi \otimes \mathrm{id}_B(x^* x).$$

Hinweis: Man kann das Tensorprodukt geeigneter Darstellungen betrachten und mit einer geeigneten Projektion komprimieren.

Aufgabe 2:
Seien A, B C*-Agebren und $I \lhd A$, $J \lhd B$ (abgeschlossene, zweiseitige) Ideale. Sei γ eine C*-Norm auf $A \odot B$, also auch auf $I \odot J$.
a) Man zeige: $I \otimes_\gamma J \lhd A \otimes_\gamma B$.
b) Falls I und J wesentlich sind, so auch $I \otimes_{\min} J$.
(Ein Ideal heißt wesentlich, falls es nichttrivialen Durchschnitt mit jedem nichtverschwindenden Ideal hat.)
c) Die Aussage in b) ist für beliebige C*-Normen i.a. nicht richtig.
(Hier dürfen Sie benutzen, dass es unterschiedliche C*-Normen auf $\mathcal{B}(\ell^2(\mathbb{N})) \odot \mathcal{B}(\ell^2(\mathbb{N}))$ gibt.

Aufgabe 3:
Sei X ein Operatorsystem, B eine C*-Algebra und $\varphi : X \longrightarrow B$ linear mit $\varphi(1) \geq 0$, $\|\varphi(1)\| = \|\varphi\|$. Muss φ positiv sein? Man vergleiche mit der Situation für Zustände.

Abgabe Freitag, 13.05., in der Übung.