Aufgabe 1:
Man beweise Lemma 3.8 (iii): Für Elemente a, h in einer C*-Algebra A gilt

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ a^* & 1 \end{pmatrix} \geq 0 \Longleftrightarrow a^*a \leq h.$$

Man zeige außerdem, dass die Umkehrung der Implikation in Lemma 3.8 (ii) nicht gilt: Aus $a^*a \leq \|h\| \cdot h$ folgt nicht $\begin{pmatrix} 1 & a \\ a^* & h \end{pmatrix} \geq 0$, und auch nicht $\begin{pmatrix} h & a \\ a^* & h \end{pmatrix} \geq 0$. (Man kann bis auf skalare Vielfache dieselben Elemente a, h für beide Aussagen benutzen.)

Aufgabe 2:
Sei A eine C*-Algebra. Man zeige, dass die Abbildungen

$$\mathrm{Tr}, \sigma : M_n(A) \longrightarrow A, \quad \mathrm{Tr}((a_{ij})) := \sum_i a_{ii} \text{ bzw. } \sigma((a_{ij})) := \sum_{i,j} a_{ij}$$

vollständig positiv sind.
Man folgere, dass $\| \sum_{ij} a_{ij} \| \leq n \|(a_{ij})\|$ gilt.

Aufgabe 3:
Sei A eine C*-Algebra. Sei A^{op} derselbe Vektorraum, ausgestattet mit derselben Norm und Involution, jedoch mit der Multiplikation $a \bullet b := ba$.
Man zeige:
(i) A^{op} ist eine C*-Algebra.
(ii) M_2 und M_2^{op} sind *-isomorph. Können Sie einen *-Isomorphismus explizit angeben?
(iii) Die Abbildung id : $A \longrightarrow A^{\mathrm{op}}$ ist positiv. Sie ist vollständig positiv genau dann, wenn A kommutativ ist. Hinweis: Für den letzten Teil betrachte man zunächst ein möglichst einfaches Beispiel und benutze dann eine irreduzible Darstellung von A.

Bemerkung: Es gilt im Allgemeinen nicht $A \cong A^{\mathrm{op}}$ als C*-Algebren. Es ist eine schwierige offene Frage, ob die Aussage für A nuklear und separabel richtig ist.

Abgabe Freitag, 27.05., in der Übung.