
Aufgabe 1:
Sei A eine C*-Algebra. Man zeige, dass jedes $x \in \mathrm{K}_0(A)$ geschrieben werden kann als

$$x = [p]_0 - \left[\begin{pmatrix} 1_n & 0_n \\ 0_n & 0_n \end{pmatrix} \right]_0$$

für ein $p \in P_{2n}(A^+)$ mit

$$p - \begin{pmatrix} 1_n & 0_n \\ 0_n & 0_n \end{pmatrix} \in M_{2n}(A).$$

Aufgabe 2:
Sei A eine unitale C*-Algebra und $a \in A^1_+$. Man zeige, dass

$$p := \begin{pmatrix} a & (a-a^2)^{\frac{1}{2}} \\ (a-a^2)^{\frac{1}{2}} & 1-a \end{pmatrix}$$

eine Projektion ist, die Murray–von Neumann äquivalent ist zu

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3:
Sei A eine unitale C*-Algebra und $s \in A$ eine Isometrie. Definiere $\mu : A \to A$ durch $\mu(a) := sas^*$.
Man zeige, dass $\mathrm{K}_0(\mu) = \mathrm{id}_{\mathrm{K}_0(A)}$ gilt.
Was können Sie an dieser Stelle für $\mathcal{O}_n = \mathrm{C}^*(s_1, \ldots, s_n \mid s_i^* s_i = 1 = \sum_{i=1}^n s_i s_i^*)$ folgern?

Abgabe Freitag, 01.07., in der Übungsgruppe.