

Aufgabe 1:

Man zeige: Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$ so dass gilt: Sei A eine unitale C^* -Algebra und $x \in A$ ein Element mit $\|x^*x - 1\| < \delta$, $\|xx^* - 1\| < \delta$. Dann existiert ein Unitäres $u \in \mathcal{U}(A)$ mit $\|x - u\| < \varepsilon$.

Aufgabe 2:

Sei A eine C^* -Algebra und $p \in A$ eine volle Projektion, d.h. das von p erzeugte zweiseitige Ideal in A ist dicht.

Man zeige: Ist $q \in A$ eine weitere Projektion, so existiert ein $n \in \mathbb{N}$ so dass p in $M_n(A)$ Murray-von Neumann subäquivalent ist zu $p \oplus \dots \oplus p$ (n Summanden).

Aufgabe 3:

Sei A eine unitale C^* -Algebra und $\text{Aut}(A)$ die Gruppe der Automorphismen von A . Sei $\text{Inn}(A) = \{Adu \mid u \in \mathcal{U}(A)\}$ die Untergruppe der inneren Automorphismen (wo $Adu(a) := uau^*$). Man zeige:

1. $\text{Inn}(A)$ ist eine normale Untergruppe von $\text{Aut}(A)$.
2. $K_0(\alpha) = \text{id}_{K_0(A)}$ falls $\alpha \in \text{Inn}(A)$; ebenso für K_1 .