§0 Metrische Räume

1. <u>Erinnerung</u>. Sei X eine Menge. Eine Abbildung $d: X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ heißt <u>Metrik</u>, wenn für alle $u, v, w \in X$ gilt:

(M1) $d(u,v) = d(v,u) \geq 0$

(M2) $d(u,v) = 0 \iff u = v$

(M3) $d(u,w) \leq d(u,v) + d(v,w)$ (<u>Dreiecksungleichung</u>)

<u>Beispiele</u>. (a) $X \subseteq \mathbb{R}$, $d(u,v) = |u-v|$

(b) $X \subseteq \mathbb{R}^m$, $d(u,v) = \left(\sum_{j=1}^{m} |u_j - v_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$

<u>Euklidische Metrik</u>

(c) X beliebig, $d(u,v) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } u = v \\ 1 & \text{wenn } u \neq v \end{cases}$

<u>diskrete Metrik</u>

Man nennt (X,d) einen <u>metrischen Raum</u>.

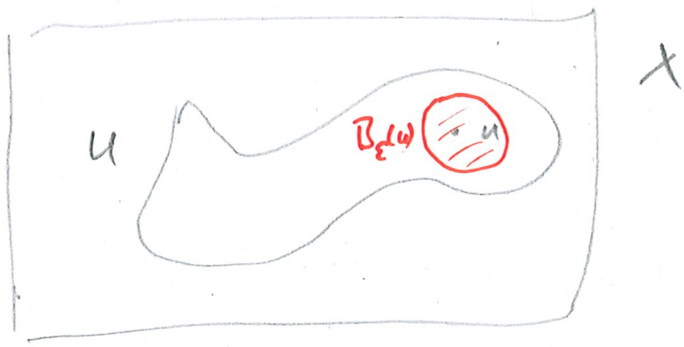
Klar: $A \subseteq X$ Teilmenge $\rightsquigarrow$ $(A, d|_{A \times A})$ ist auch metrischer Raum.

2. <u>Def</u> Sei (X,d) ein metrisch Raum, $u \in X$, $\varepsilon > 0$. Wir setzen

$$B_\varepsilon(u) = \{ v \in X \mid d(u,v) < \varepsilon \} \subseteq X$$

der offen <u>ε-Ball</u> um u.

Eine Teilmenge $U \subseteq X$ heißt <u>offen in X</u>, wenn gilt: zu jedem $u \in U$ gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(u) \subseteq U$.



<u>Bsp.</u> (a) $\emptyset, X \subseteq X$ sind stets offen in X

(b) $B_\varepsilon(v)$ ist offen, denn: $u \in B_\varepsilon(v) \Rightarrow d(u,v) = r < \varepsilon$. Für $\delta = \varepsilon - r$ gilt $B_\delta(u) \subseteq B_\varepsilon(v)$ nach Dreiecksungleichung: $w \in B_\delta(u) \Rightarrow d(v,w) \leq d(v,u) + d(u,v)$

$< \delta + r = \varepsilon$

(c) offen Intervalle in $X = \mathbb{R}$ sind offen

(d) $[0,1) \subseteq \mathbb{R} = X$ ist <u>nicht</u> offen, denn

$u = 0 \in [0,1)$, aber $\underbrace{B_\varepsilon(u)}_{(-\varepsilon,\varepsilon)} \not\subseteq [0,1)$ für

alle $\varepsilon > 0$.

3. <u>Lemma</u> Sei (X,d) ein metrischer Raum, sei $\mathcal{O}$ eine Menge von offenen Teilmengen von X. Dann ist auch $\bigcup\mathcal{O} = \{u \in X \mid \text{es gibt } U \in \mathcal{O} \text{ mit } u \in U\}$ offen. Kurz: "Vereinigungen offener Mengen sind offen."

Wenn $U_1, \ldots, U_m \subseteq X$ offen sind, dann ist auch $U_1 \cap \ldots \cap U_m \subseteq X$ offen. Kurz "<u>endliche</u> Schnitte offener Mengen sind offen."

<u>Beweis</u> Sei $u \in \bigcup\mathcal{O}$. Dann gibt es $U \in \mathcal{O}$ mit $u \in U$. Da U offen ist, gibt es $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(u) \subseteq U$ und $U \subseteq \bigcup\mathcal{O}$, also $B_\varepsilon(u) \subseteq \bigcup\mathcal{O}$.

Sei $u \in U_1 \cap \ldots \cap U_m$. Dann gibt es $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m > 0$ mit $B_{\varepsilon_j}(u) \subseteq U_j$. Setze $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m\} > 0$ $\Rightarrow B_\varepsilon(u) \subseteq U_j$ für alle $j \Rightarrow B_\varepsilon(u) \subseteq U_1 \cap \ldots \cap U_m$. $\square$

<u>Bem</u> Schnitte von unendlich vielen offenen Mengen sind nicht immer offen. z.B. gilt
$$\underbrace{[0,1)}_{\text{nicht offen}} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \underbrace{\left(-\tfrac{1}{k}, 1\right)}_{\text{offen}}$$
in $\mathbb{R}$

4. Def Sei (X,d) ein metrischer Raum. Eine Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ <u>konvergiert gegen $a \in X$</u>, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n \geq 0$ gibt so, dass für alle $k \geq n$ gilt $a_k \in D_\varepsilon(a)$ (d.h. $d(a_k, a) < \varepsilon$ für alle $k \geq n$).

Man schreibt dann $\lim_k a_k = a$ und nennt a den <u>Grenzwert</u> der Folge.

Wenn der Grenzwert existiert, ist er eindeutig bestimmt (ÜA).

Eine Teilmenge $A \subseteq X$ heißt <u>abgeschlossen in X</u> wenn für jede konvergente Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $a_k \in A$ für alle k gilt $\lim_k a_k \in A$.

5. Lemma Sei (X,d) ein metrischer Raum, sei $A \subseteq X$. Dann sind äquivalent:

(i) A ist abg. in X

(ii) $U = X - A$ ist offen in X

<u>Beweis</u>: (ii) $\Rightarrow$ (i): Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ Folge in A mit Grenzwert $a = \lim_k a_k$. Zu zeigen ist $a \in A$.

Wäre $a \in U$, so gäbe es $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(a) \subseteq U$ $\Rightarrow$ $d(a, a_k) \geq \varepsilon$ für alle k ↯ Also ist $a \in A$.

<u>$\neg$(ii) $\Rightarrow$ $\neg$(i):</u> Angenommen, $U = X - A$ ist nicht offen. Dann gibt es ein $u \in U$ so, dass für jedes $\varepsilon > 0$ gilt $B_\varepsilon(u) \cap A \neq \emptyset$. Wähle also $a_k \in B_{\frac{1}{k}}(u) \cap A$, $k = 1, 2, \dots$ (und $a_0 \in A$ beliebig). Es folgt $u = \lim_k a_k \notin A$, aber $a_k \in A$ $\Rightarrow$ A nicht abg. $\square$

6. <u>Satz</u> Sei (X, d) metrischer Raum, sei $\mathcal{C}$ eine (beliebige) Menge abg. Teilmengen von X. Dann ist auch $\bigcap \mathcal{C}$ abg. in X. Sind $A_1, A_2, \dots, A_m$ abg. in X, so auch $A_1 \cup \dots \cup A_m$. Kurz: "Beliebige Durchschnitte und endliche Vereinigungen abg. Mengen sind wieder abg."

Beweis: Setze $\mathcal{O} = \{X - A \mid A \in \mathcal{C}\}$.

Dann gilt $\bigcap \mathcal{C} = X - \bigcup \mathcal{O}$ [denn: $x \in \bigcap \mathcal{C} \iff$ für alle $A \in \mathcal{C}$ ist $x \in A \iff$ für alle $A \in \mathcal{C}$ ist $x \notin X - A$ $\iff x \in X - \bigcap \mathcal{O}$] Da $\bigcup \mathcal{O}$ offen ist nach §0.3, ist $\bigcap \mathcal{C}$ abg.

Ist $A = A_1 \cup \dots \cup A_m$ und $U_j = X - A_j$, so ist $X - (A_1 \cup \dots \cup A_m) = U_1 \cap \dots \cap U_m$ offen nach §0.3 □

Beachte $[0,1) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \underbrace{[0, 1 - \tfrac{1}{k}]}_{\text{abg in } \mathbb{R}}$ ist nicht abg.

#

7. Def Sei (X, d) ein metrischer Raum. Der Abschluss einer Teilmenge $Y \subseteq X$ ist

$$\overline{Y} = \bigcap \{A \subseteq X \mid A \text{ abg. und } A \supseteq Y\},$$

das Innere von Y ist $\mathrm{Int}(Y) = \bigcup \{U \subseteq X \mid U \text{ offen und } U \subseteq Y\}$.

Also $\mathrm{Int}(Y) \subseteq Y \subseteq \overline{Y}$, $\overline{Y}$ ist abg und $\mathrm{Int}(Y)$ ist offen. Es gilt

$$X - \overline{Y} = \mathrm{Int}(X - Y)$$

$$X - \mathrm{Int}(Y) = \overline{X - Y}$$

denn: $X - \overline{Y} \subseteq X - Y$ ist offen. Ist

$U \subseteq X - Y$ offen, so ist $A = X - U \supseteq Y$ abg

$\Rightarrow \overline{Y} \subseteq A \Rightarrow U \subseteq X - \overline{Y}$.

Die zweite Behauptung folgt entsprechend.

<u>Bsp</u> $Y = \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} = X \Rightarrow \operatorname{Int}(Y) = \emptyset$ (für kein $q \in \mathbb{Q}$ und $\varepsilon > 0$ gilt $B_\varepsilon(q) \subseteq \mathbb{Q}$) und

$\overline{Y} = \mathbb{R}$, jede reelle Zahl ist Grenzwert einer Folge von rationalen Zahlen.

8. <u>Lemma</u> Sei (X, d) ein metrischer Raum, sei $Y \subseteq X$ Teilmenge, sei $x \in X$. Dann sind äquivalent: (i) $x \in \overline{Y}$

(ii) für jedes $\varepsilon > 0$ ist $B_\varepsilon(x) \cap Y \neq \emptyset$.

<u>Beweis</u> $\neg$(i) $\Rightarrow$ $\neg$(ii): $x \in X - \overline{Y} = U$ offen

$\Rightarrow$ es gibt $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(x) \subseteq U$, d.h. $B_\varepsilon(x) \cap Y = \emptyset$

$\neg$(ii) $\Rightarrow$ $\neg$(i): Wenn es $\varepsilon > 0$ gibt mit $B_\varepsilon(x) \cap Y = \emptyset$, so gilt $Y \subseteq X - B_\varepsilon(x) = A$ abg, $x \notin A$

$\Rightarrow x \notin \overline{Y}$ $\square$

9. <u>Erinnerung</u> Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume. Eine Abbildung $f: X \to Y$ heißt <u>stetig im Punkt $x \in X$</u>, wenn gilt: für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ mit

$$f(B_\delta(x)) \subseteq B_\varepsilon(f(x)), \text{ d.h.}$$

$$d_X(x, u) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(u)) < \varepsilon.$$

Wenn f in jedem Punkt $x \in X$ stetig ist, dann heißt f <u>stetig</u>.

10. <u>Satz</u> Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume, $f: X \to Y$ eine Abbildung. Dann sind äquivalent:

(i) f ist stetig

(ii) für jede offene Menge $V \subseteq Y$ ist $f^{-1}(V) = U \subseteq X$ offen

(iii) für jede abg. Menge $B \subseteq Y$ ist $f^{-1}(B) = A \subseteq X$ abg.

(iv) Für jede Teilmenge $S \subseteq X$ gilt

$$f(\overline{S}) \subseteq \overline{f(S)}$$

Beweis (i)$\Rightarrow$(ii): Sei f stetig und $V \subseteq Y$ offen, $U = f^{-1}(V)$. Sei $u \in U$. Dann gibt es $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(f(u)) \subseteq V$ und $\delta > 0$ mit $f(B_\delta(u)) \subseteq B_\varepsilon(f(u)) \subseteq V$. Es folgt $B_\delta(u) \subseteq U$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Sei $B \subseteq Y$ abg., $V = Y - B$. Dann ist $f^{-1}(V) = U$ offen und $f^{-1}(B) = A = X - U$ ist abg.

(iii) $\Rightarrow$ (iv): Es gilt $\underbrace{f^{-1}(\overline{f(S)})}_{\text{abg}} \supseteq S$, also $f^{-1}(\overline{f(S)}) \supseteq \overline{S} \Rightarrow \overline{f(S)} \supseteq f(\overline{S})$.

(iv) $\Leftrightarrow$ (i) ist ÜA. (*) $\square$

Folgerung. Wenn $f: X \to Y$ und $g: Y \to Z$ stetig sind, so auch $g \circ f: X \to Z$.

Beweis: $W \subseteq Z$ offen $\Rightarrow$ $g^{-1}(W) = V \subseteq Y$ offen $\Rightarrow$ $f^{-1}(V) = U \subseteq X$ offen, $f^{-1}(V) = (g\circ f)^{-1}(W)$. $\square$

(*) Ist $x \in X$ und $\varepsilon > 0$, betrachte $B = Y - B_\varepsilon(f(x))$ sowie $A = f^{-1}(B)$. Dann ist $f(\overline{A}) \subseteq B$ ~> $\overline{A} = A$ d.h. A ist abg., $x \notin A$. Also gibt es $\delta > 0$ mit $B_\delta(x) \subseteq X - A$ ~> $f(B_\delta(x)) \subseteq B_\varepsilon(f(x))$ d.h. (iv) $\Rightarrow$ (i).

11. Def Sei X eine Menge, d_1 und d_2 seien Metriken auf X. Wir nennen d_1 und d_2 *topologisch äquivalent*, wenn beide Metriken die gleichen offenen Mengen liefern (und damit nach §0.10 den gleichen Begriff von Stetigkeit).

Lemma Sind d_1, d_2 Metriken auf X und gibt es $L \in \mathbb{R}$, $L > 0$ mit $d_1 \leq L \cdot d_2$, so ist jede d_1-offene Menge d_2-offen.

(Man nennt L eine Lipschitz-Konstante)

Beweis Sei $U \subseteq X$ d_1-offen. Zu jedem $u \in U$ gibt es also $\varepsilon > 0$ so, dass $W_1 = \{v \in X \mid d_1(u,v) < \varepsilon\} \subseteq U$. Dann gilt für $W_2 = \{w \in X \mid L \cdot d_2(u,w) < \varepsilon\}$, dass $u \in W_2 \subseteq W_1$, also ist U d_2-offen. $\square$

Beispiel Auf $\mathbb{R}^m$ sind die folgenden Metriken topologisch äquivalent:

$$d_1(u,v) = \sum_{j=1}^{m} |u_j - v_j|$$

$$d_2(u,v) = \left(\sum_{j=1}^{m} (u_j - v_j)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$d_\infty(u,v) = \max_j |u_j - v_j|$$

Denn $\sum_{j=1}^{n}(u_j-v_j)^2 \leq \left(\sum_{j=1}^{m}|u_j-v_j|\right)^2$

$\Rightarrow d_2^2 \leq d_1^2 \Rightarrow d_2 \leq d_1$

$$\sum_{j=1}^{m}(u_j-v_j)^2 \geq \max_j\left(|u_j-v_j|^2\right) \overset{(!)}{=} \left(\max_j |u_j-v_j|\right)^2$$

$\Rightarrow d_\infty^2 \leq d_2^2 \Rightarrow d_\infty \leq d_2$

$m \cdot \max_j |u_j-v_j| \geq \sum_{j=1}^{m}|u_j-v_j| \Rightarrow d_1 \leq m \cdot d_\infty$

Insgesamt $d_\infty \leq d_2 \leq d_1 \leq m \cdot d_\infty$ $\square$

12. Lemma / Beobachtung Sei (X,d) ein metrischer Raum. Setze $\bar{d}(u,v) = \min\{d(u,v), 1\} \leq 1$

Dann sind d und $\bar{d}$ topologisch äquivalent.

Beweis (a) $\bar{d}$ ist Metrik, denn:

$\bar{d}(u,v) = 0 \Leftrightarrow d(u,v) = 0 \Leftrightarrow u = v$

$\bar{d}(u,v) = \bar{d}(v,u) \geq 0$

$\underbrace{\bar{d}(u,w)}_{\leq 1} \leq d(u,w) \leq d(u,v) + d(v,w)$

Ist $d(u,v) > 1$, so $\bar{d}(u,v) = 1$ $(\checkmark)$

Ist $d(v,w) > 1$, so $\bar{d}(v,w) = 1$ $(\checkmark)$

Wegen $\bar{d} \le d$ ist jede $\bar{d}$-offene Menge auch d-offen.

Ist $U \subseteq X$ d-offen, $u \in U$, so gibt es $\varepsilon > 0$ mit
$V = \{ v \in X \mid d(v,u) < \varepsilon \} \subseteq U$. OE $\varepsilon < \frac{1}{2}$
$\Rightarrow V = \{ v \in X \mid \bar{d}(v,u) < \varepsilon \}$ $\square$

13. <u>Def</u> Seien $(X_1, d_1), \dots, (X_m, d_m)$ metrische Räume, sei $X = X_1 \times \dots \times X_m$ mit Metrik

$$d(u,v) = \sum_{j=1}^{m} d_j(u_j, v_j).$$

Dann ist (X, d) ein metrischer Raum: $d(u,v) \ge 0$, $d(u,v) = d(v,u)$

$$d(u,v) = 0 \Leftrightarrow d_j(u_j, v_j) = 0 \text{ für } j = 1, \dots, m$$
$$\Leftrightarrow u_j = v_j \text{ für } j = 1, \dots, m \Leftrightarrow u = v$$

$$d(u,w) = \sum_{j=1}^{m} d_j(u_j, w_j) \le \sum_{j=1}^{m} \left(d_j(u_j, v_j) + d_j(v_j, w_j) \right)$$
$$= d(u,v) + d(v,w).$$

Für jedes $j = 1, \dots, m$ ist die Abbildung

$$pr_j : X \to X_j, \quad (u_1, \dots, u_m) \longmapsto u_j \quad \text{stetig},$$

denn: $d(u,v) < \varepsilon \Rightarrow d_j(u_j, v_j) = d(pr_j(u), pr_j(v)) < \varepsilon$.

14. **Satz** Sei $(X_1, d_1), \ldots, (X_m, d_m)$, (Y, d_Y) metrische Räume, sei $X = X_1 \times \ldots \times X_m$ und sei d wie oben in §0.13. Sei $f: Y \to X$ eine Abbildung. Dann sind äquivalent:

(i) f ist stetig

(ii) Für jedes $j = 1, \ldots, m$ ist $pr_j \circ f : Y \to X_j$ stetig.

Beweis (i) $\Rightarrow$ (ii): f stetig, pr_j stetig $\Rightarrow$ $pr_j \circ f$ auch stetig.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Sei $u \in Y$ und sei $\varepsilon > 0$. Wähle $\delta_j > 0$, dann für $v \in Y$ gilt: $d_Y(u,v) < \delta_j \Rightarrow d_j(pr_j f(u), pr_j(f(v))) < \frac{1}{m} \cdot \varepsilon$

Setze $\delta = \min\{\delta_1, \ldots, \delta_m\}$. Dann gilt:

$$d_Y(u,v) < \delta \Rightarrow d_j(pr_j(f(u)), pr_j(f(v))) < \frac{1}{m}\varepsilon$$
$$\Rightarrow d(f(u), f(v)) < \varepsilon. \qquad \square$$

Wir sehen hier eine universelle Eigenschaft von $X = X_1 \times \ldots \times X_m$:

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f_j"'] & X \arrow[d, "pr_j"] \\ & X_j \end{tikzcd}$$

F ist genau dann stetig, wenn die einzelnen F_j stetig sind.