§1 Topologische Räume

1. <u>Def</u> Sei X eine Menge und sei $\mathcal{T}$ eine Menge von Teilmengen von X. Wir nennen $\mathcal{T}$ eine <u>Topologie</u> auf X, wenn gilt:

(Top1) $\emptyset \in \mathcal{T}$ und $X \in \mathcal{T}$ (insbesondere $\mathcal{T} \neq \emptyset$!)

(Top2) Ist $U_1, \dots, U_m \in \mathcal{T}$, so ist $U_1 \cap \dots \cap U_m \in \mathcal{T}$

(Top3) Ist $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{T}$ eine Teilmenge, so ist $\bigcup \mathcal{O} \in \mathcal{T}$

Die Elemente von $\mathcal{T}$ heißen <u>offene Mengen</u>, das Paar $(X, \mathcal{T})$ heißt <u>topologischer Raum</u>.

<u>Bsp</u> (a) X beliebig, $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\} = \mathcal{T}_{Klump}$

"Klumpentopologie".

(b) X beliebig, $\mathcal{T} = \mathfrak{P}(X) = \{U \mid U \subseteq X \text{ Teilmenge}\} = \mathcal{T}_{disk}$

Potenzmenge von X

"Diskrete Topologie"

(c) X beliebig, $\mathcal{T} = \{U \subseteq X \mid X - U \text{ ist endlich}\} \cup \{\emptyset\} = \mathcal{T}_{kof}$

"koendliche Topologie"

(d) (X, d) metrischer Raum, $\mathcal{T} = \{U \subseteq X \mid U \text{ offen wie in } §0.2\} = \mathcal{T}_d$ ist die metrische Topologie, vgl. §0.3

Es gilt stets

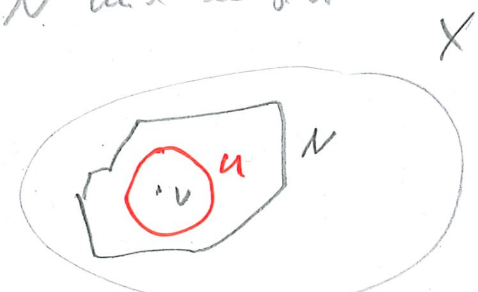
$$\mathcal{T}_{Klump} \subseteq \mathcal{T}_{kof} \subseteq \mathcal{T}_{d} \subseteq \mathcal{T}_{disk}$$

Die Topologien (a), (b), (c) sind hauptsächlich für Gegenbeispiele wichtig.

2. <u>Def</u> Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Wir nennen $A \subseteq X$ <u>abgeschlossen</u>, falls $U = X - A \in \mathcal{T}$.

Wie in §0.6 folgt sofort: $\emptyset, X$ sind abg., beliebige Durchschnitte und endliche Vereinigungen abg. Mengen sind wieder abg.

3. <u>Def</u> Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum, sei $v \in X$. Eine Teilmenge $N \subseteq X$ heißt <u>Umgebung von v</u>, wenn gilt: $v \in N$ und es gibt $U \in \mathcal{T}$ mit $v \in U \subseteq N$



<u>Bsp</u>: In $\mathbb{R}$ (mit der üblichen Topologie) ist $[-\varepsilon, \varepsilon] \subseteq \mathbb{R}$ für $\varepsilon > 0$ eine (abgeschlossene) Umgebung von 0.

Sei $Y \subseteq X$ Teilmenge. Wir nennen $v \in X$ einen <u>Häufungspunkt</u> von Y, falls es für <u>jede</u> Umgebung N von v ein $y \in N \cap Y$ gibt mit $y \neq v$.

<u>Bsp</u> $Y = \{\frac{1}{n} \mid n \geq 1\}$. Dann ist $\frac{1}{39} \in Y$ <u>kein</u> Häufungspunkt, denn $N = (\frac{1}{40}, \frac{1}{38})$ ist Umgebung mit $N \cap Y = \{\frac{1}{39}\}$. Also 0 ist ein H.P. von Y.

<u>ÜA</u> $\bar{Y} = Y \cup \{v \in X \mid v \text{ HP von } Y\}$

Der <u>Abschluss</u> von ein Teilmenge $Y \subseteq X$ ist $\bar{Y} = \bigcap \{A \subseteq X \mid A \text{ abg.}, A \supseteq Y\}$, das Innere ist $\mathrm{Int}(Y) = \bigcup \{U \subseteq X \mid U \text{ offen}, U \subseteq Y\}$

4. <u>Def</u> Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologisch Raum, sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in X. Wir sagen, die Folge <u>konvergiert gegen $v \in X$</u>, wenn gilt: für jede Umgebung N von v gibt es ein $m \in \mathbb{N}$ so, dass $x_k \in N$ für alle $k \geq m$.

<u>Bsp</u> (a) $(X, \mathcal{T}_d)$ d Metrik. Konvergenz in §1.4 entspricht Konvergenz in §0.4

(b) $X = \mathbb{N}$ mit kofiniter Topologie, $x_n = n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen <u>jedes</u> $l \in \mathbb{N}$, denn: ist N eine Umgebung von l so gibt es endliche Teilmenge $E \subseteq \mathbb{N}$ mit $N = \mathbb{N} - E$, für $n > \max E$ ist $x_n \in N$.

Folge und Konvergenz in allgemeinen topologischen Räumen können problematisch sein.

5. Def Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Eine Teilmenge $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ heißt eine Basis der Topologie $\mathcal{T}$, wenn gilt: jedes $U \in \mathcal{T}$ ist Vereinigung von Elementen aus $\mathcal{B}$, genauer:

$$U \in \mathcal{T} \Rightarrow U = \bigcup \{ V \in \mathcal{B} \mid V \subseteq U \}$$

Bsp (a) $\mathcal{B} = \mathcal{T}$ ist eine Basis.

(b) (X, d) metrischer Raum, $\mathcal{B} = \{ B_\varepsilon(v) \mid v \in X, \varepsilon > 0 \}$ ist Basis

(c) $(\mathbb{R}, d)$ mit $d(u,v) = |u - v|$,

$\mathcal{B} = \{ B_\varepsilon(v) \mid v \in \mathbb{Q}, \varepsilon > 0, \varepsilon \in \mathbb{Q} \}$ ist Basis von $\mathcal{T}_d$ (und $\mathcal{B}$ ist abzählbar!)

6 Satz Sei X eine Menge, sei $\mathcal{B}$ eine Menge von Teilmengen von X mit folgenden Eigenschaften:

($\mathcal{B}$1) $X = \bigcup \mathcal{B}$, zu jedem $v \in X$ gibt es $V \in \mathcal{B}$ mit $v \in V$.

($\mathcal{B}$2) Ist $U, V \in \mathcal{B}$ und $w \in U \cap V$, so gibt es $W \in \mathcal{B}$ mit $w \in W \subseteq U \cap V$.

Wir nennen $U \subseteq X$ <u>$\mathcal{B}$-offen</u>, wenn gilt $U = \bigcup \{ V \in \mathcal{B} \mid V \subseteq U \}$. Dann bilden die $\mathcal{B}$-offenen Mengen eine Topologie $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ mit Basis $\mathcal{B}$.

<u>Beweis</u>: $\emptyset, X$ sind $\mathcal{B}$-offen nach (B1).
Ist $U_1, \dots, U_m$ $\mathcal{B}$-offen und ist $w \in U_1 \cap \dots \cap U_m$, so folgt: es gibt $V_j \subseteq U_j$ mit $w \in V_j$, $V_j \in \mathcal{B}$. Mit (B2) und Induktion gibt es $W \in \mathcal{B}$ mit
$w \in W \subseteq V_1 \cap \dots \cap V_m \subseteq U_1 \cap \dots \cap U_m \Rightarrow$
$U_1 \cap \dots \cap U_m$ ist $\mathcal{B}$-offen. Also gilt (Top2).
Ist $\mathcal{O}$ eine Menge von $\mathcal{B}$-offenen Mengen und ist $v \in \bigcup \mathcal{O}$, so gibt es $U \in \mathcal{O}$ mit $v \in U$, also gibt es $V \in \mathcal{B}$ mit $v \in V \subseteq U \subseteq \bigcup \mathcal{O} \Rightarrow \bigcup \mathcal{O}$ ist $\mathcal{B}$-offen.
Nach Konstruktion ist $\mathcal{B}$ eine Basis von $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$. $\square$

Beachte: Falls $\mathcal{B}$ Basis einer Topologie $\mathcal{T}$ ist, so gilt $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$.

<u>Beispiel</u> $X = \mathbb{R}$, $\mathcal{L} = \{ [a,b) \mid a,b \in \mathbb{R}, a<b \}$

Die Menge $\mathcal{L}$ erfüllt (B1) und (B2). Die zugehörige Topologie $\mathcal{T}_{\mathcal{L}}$ auf $\mathbb{R}$ heißt die <u>Sorgenfrey-Topologie</u> [R.H. Sorgenfrey, amerik. Mathematiker]

Beachte: $[0,1)$ ist $\mathcal{L}$-offen. Weiter gilt

$(a,b) = \bigcup \{ [c,b) \mid a<c<b \} \in \mathcal{T}_{\mathcal{L}}$, folglich

ist $\mathcal{T}_d \subsetneq \mathcal{T}_{\mathcal{L}}$. Die Sorgenfrey-Topologie ist gut für Gegenbeispiele. #

7. <u>Def</u> <u>Die Ordnungstopologie</u>

Erinnerung: $(X,<)$ heißt <u>angeordnete Menge</u>, wenn $<$ eine (2-stellige) Relation auf X ist mit

(O1) $u<v,\ v<w \Rightarrow u<w$

(O2) $u<v \Rightarrow u \neq v$

(O3) $u \neq v \Rightarrow (u<v$ oder $v<u)$

Für $u,v \in X$ mit $u<v$ schreibe

$$(u,v) = \{ w \in X \mid u<w<v \}$$

$$(-\infty, v) = \{ w \in X \mid w<v \}$$

$$(u, \infty) = \{ w \in X \mid u<w \}$$

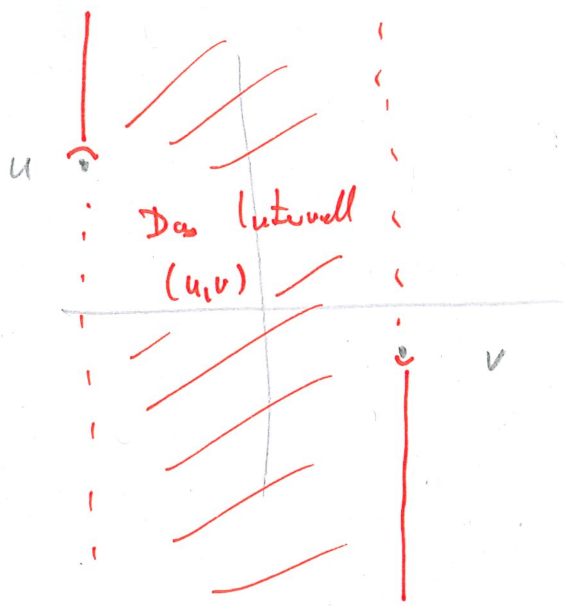
Dann ist $\mathcal{B} = \{ (u,v) \mid u<v, u,v \in X \}$
$\cup \{ (-\infty, v) \mid v \in X \}$
$\cup \{ (u, \infty) \mid u \in X \} \cup X$

eine Basis (Nachrechnen mit Fallunterscheidungen!), die zugehörige Topologie ist die <u>Ordnungstopologie</u> $\mathcal{T}_<$.

<u>Bsp</u> (a) $(\mathbb{R}, <)$ ⇝ die Ordnungstopologie ist die übliche Topologie auf $\mathbb{R}$, $\mathcal{T}_< = \mathcal{T}_d$.

(b) $X = \mathbb{R}^2$ mit lexikographischer Ordnung $<$

$$u = (u_1, u_2) < v = (v_1, v_2) \iff \begin{cases} u_1 < v_1 & \text{oder} \\ u_1 = v_1, & u_2 < v_2 \end{cases}$$



Die zugehörige Topologie auf $\mathbb{R}^2$ ist <u>nicht</u> die übliche Topologie!

8. <u>Def</u> Seien $(X, \mathcal{T}_X)$ und $(Y, \mathcal{T}_Y)$ topologische Räume. Eine Abbildung $f: X \to Y$ heißt <u>stetig</u>, wenn für jede offene Teilmenge $V \subseteq Y$ das Urbild $U = f^{-1}(V)$ offen ist. (Vgl. § 0.10)

<u>Satz A</u> Seien $(X, \mathcal{T}_X)$ und $(Y, \mathcal{T}_Y)$ top. Räume und sei $f: X \to Y$ eine Abbildung. Dann sind äquivalent: (i) f ist stetig

(ii) für jede abg. Menge $B \subseteq Y$ ist $A = f^{-1}(B) \subseteq X$ abg.

(iii) für jede Teilmenge $S \subseteq X$ gilt $f(\bar{S}) \subseteq \overline{f(S)}$.

<u>Beweis</u> <u>(i) $\Leftrightarrow$ (ii)</u>: $B \subseteq Y$ abg $\Leftrightarrow$ $V = Y - B$ offen

und $f^{-1}(B) = X - f^{-1}(V)$

$f^{-1}(V) = X - f^{-1}(B)$

<u>(ii) $\Rightarrow$ (iii)</u>: $S \subseteq f^{-1}(f(S)) \Rightarrow S \subseteq \underbrace{f^{-1}(\overline{f(S)})}_{\text{abg}}$

$\Rightarrow \bar{S} \subseteq f^{-1}(\overline{f(S)}) \Rightarrow f(\bar{S}) \subseteq \overline{f(S)}$.

<u>(iii) $\Rightarrow$ (ii)</u>: Sei $B \subseteq Y$ abg, $A = f^{-1}(B)$. Dann

$f(A) \subseteq B \Rightarrow \overline{f(A)} \subseteq \bar{B} = B$. Es folgt

$f(\bar{A}) \subseteq B$, also $\bar{A} \subseteq A = f^{-1}(B)$, d.h. $A = \bar{A}$ $\square$

<u>Satz B</u> Seien $(X, \mathcal{T}_X)$ und $(Y, \mathcal{T}_Y)$ top. Räume, sei $f: X \to Y$ eine Abbildung, sei $\mathfrak{B}$ eine Basis der Topologie $\mathcal{T}_Y$. Dann sind äquivalent:

(i) f ist stetig

(ii) für jedes $V \in \mathfrak{B}$ ist $f^{-1}(V) \subseteq X$ offen

(iii) Für jedes $x \in X$ und für jede Umgebung $N \subseteq Y$ von $f(x)$ gibt es eine Umgebung M von x mit $f(M) \subseteq N$ ("ε-δ-Kriterium").

<u>Beweis</u> <u>(i) $\Rightarrow$ (ii)</u>: Das ist klar, denn $V \in \mathfrak{B} \Rightarrow$ V offen in Y.

<u>(ii) $\Rightarrow$ (iii)</u>: Sei N Umgebung von $f(x)$. Dann gibt es $V \in \mathfrak{B}$ mit $f(x) \in V \subseteq N$, $U = f^{-1}(V)$ ist offen, $x \in U$, $f(U) \subseteq V \subseteq N$. Setze $M = U$.

<u>(iii) $\Rightarrow$ (i)</u>: Sei $V \subseteq Y$ offen, $U = f^{-1}(V) \subseteq X$. Sei $u \in U$. Da V eine Umgebung von $f(u)$ ist, gibt es eine Umgebung M von u mit $f(M) \subseteq V \Rightarrow$ $M \subseteq U$, es gibt $W_u \subseteq X$ offen mit $u \in W_u \subseteq M \subseteq U$ $\Rightarrow$ U offen, denn $U = \bigcup \{ W_u \mid u \in U \}$ offen. $\square$

Beispiel (a) $f : X \to Y$ konstante Abbildung.

Für $V \subseteq Y$ gilt $f^{-1}(V) = \emptyset$ oder $f^{-1}(V) = X$

$\leadsto$ f stetig.

(b) $f = id_X$, $X = Y$, $\underline{\mathcal{T}_X = \mathcal{T}_Y}$ $\leadsto$ f stetig

(c) $(X, \mathcal{T}_X)$ beliebig, $\mathcal{T}_Y = \mathcal{T}_{Klump} = \{\emptyset, Y\}$

Dann ist jede Abbildung $f : X \to Y$ stetig.

(d) $(Y, \mathcal{T}_Y)$ beliebig; $\mathcal{T}_X = \mathcal{T}_{disk} = \{ U \mid U \subseteq X \text{ beliebig} \}$

Dann ist jede Abbildung $f : X \to Y$ stetig.

(e) Wenn (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume sind, so entspricht Stetigkeit nach §1.8 Stetigkeit nach §0.9, vgl §0.10.

Satz C Wenn $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ stetig sind (bzgl Topologien $\mathcal{T}_X, \mathcal{T}_Y, \mathcal{T}_Z$), so ist $g \circ f : X \to Z$ stetig.

Beweis Sei $W \subseteq Z$ offen in Z. Dann ist $V = g^{-1}(W) \subseteq Y$ offen, also auch $U = f^{-1}(V) \subseteq X$ offen und $U = (g \circ f)^{-1}(W)$. $\square$

<u>Konvention</u> Ab jetzt schreiben wir (oft) "sei X ein topologischer Raum" statt "sei $(X,\mathfrak{T})$ ein topologischer Raum" und "sei $U \subseteq X$ offen" statt "sei $U \in \mathfrak{T}$".

9. <u>Def</u> Seien X, Y topologische Räume.
Wir schreiben $C(X,Y) = \{ f: X \to Y \mid f \text{ ist stetig} \}$

Dann ist $C(X,X) = \{ f: X \to X \mid f \text{ ist stetig} \}$ ein <u>Monoid</u> bzgl. der Verknüpfung von Abbildungen, mit Neutralelement id_X [d.h. $f, g \in C(X,X) \Rightarrow g \circ f \in C(X,X)$, $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$, $id_X \circ f = f = f \circ id_X$]

Wir nennen eine stetige Abbildung $f: X \to Y$ einen <u>Homöomorphismus</u>, wenn es eine stetige Abbildung $h: Y \to X$ gibt mit $h \circ f = id_X$ <u>und</u> $f \circ h = id_Y$.

Dann ist insbesondere f <u>bijektiv</u>.

Homöomorphismen sind also Isomorphismen von topologischen Räumen.

Beispiel / Gegenbeispiel $X = Y = \mathbb{R}$

$\mathcal{T}_X$ diskrete Topologie, $\mathcal{T}_Y$ übliche Topologie auf $\mathbb{R}$

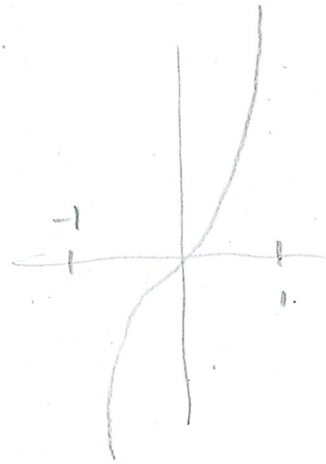
Dann ist $f(t) = t$ stetig als Abbildung $X \to Y$ und bijektiv. Die Umkehrabbildung $h: Y \to X$, $h(t) = t$ ist nicht stetig, denn z.B. ist $\{0\}$ offen in $\mathcal{T}_{disk}$, aber $h^{-1}(\{0\}) = \{0\}$ ist nicht offen in $\mathcal{T}_Y$.

Beispiel (a) $X = \mathbb{R}$, $Y = (0, \infty)$ beide mit der üblichen metrischen Topologie. Dann ist $\exp: X \to Y$ ein Homöomorphismus mit Inversem $\log: Y \to X$.

(b) $X = (-1, 1) \subseteq \mathbb{R}$, $Y = \mathbb{R}$,

$f(x) = \frac{x}{1 - x^2}$ mit Inversem

$h(x) = \frac{2y}{1 + \sqrt{1 + 4y^2}}$



Erinnerung: Ist X ein metrischer Raum und $Y \subseteq X$ Teilmenge, so ist auch Y ein metrischer Raum.

10. Die Teilraumtopologie / Unterräume

<u>Def</u> Sei $(X, \mathcal{T})$ ein top. Raum, sei $Y \subseteq X$ eine Teilmenge. Setze $\mathcal{T}|Y = \{ U \cap Y \mid U \in \mathcal{T} \}$.
Dann ist $(Y, \mathcal{T}|Y)$ ein topologischer Raum und die Inklusionsabbildung $Y \hookrightarrow X$ ist stetig.
Man nennt Y <u>Teilraum</u> / <u>Unterraum</u> und $\mathcal{T}|Y$ die <u>Teilraumtopologie</u>.

<u>Beweis, dass $\mathcal{T}|Y$ eine Topologie ist:</u>

$\emptyset \cap Y = \emptyset$, $X \cap Y = Y \Rightarrow \emptyset, Y \in \mathcal{T}|Y$. (Top1)

Ist $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{T}$ irgendeine Teilmenge, so gilt für $\mathcal{C}|Y = \{ U \cap Y \mid U \in \mathcal{C} \}$, dass

$$\bigcup(\mathcal{C}|Y) = \bigcup\{U \cap Y \mid U \in \mathcal{C}\} = \left(\bigcup \mathcal{C}\right) \cap Y \quad \text{(Top3)}$$

$$\bigcap(\mathcal{C}|Y) = \bigcap\{U \cap Y \mid U \in \mathcal{C}\} = \left(\bigcap \mathcal{C}\right) \cap Y$$

Insbesondere: $\mathcal{C} = \{ U_1, \dots, U_m \}$

$$(U_1 \cap Y) \cap \dots \cap (U_m \cap Y) = (U_1 \cap \dots \cap U_m) \cap Y \quad \text{(Top2)}$$

$\rightsquigarrow \mathcal{T}|Y$ ist Topologie $\square$

Betrachte die Inklusion $i : Y \hookrightarrow X$. Ist $V \subseteq X$ offen, so ist $i^{-1}(V) = V \cap Y$ offen in der Teilraumtopologie $\Rightarrow$ i ist stetig. $\square$

Achtung: Ist $Z \subseteq Y$ offen oder abg in der Teilraumtopologie von Y, so folgt nicht unbedingt, dass Z offen oder abg ist in X!

Bsp Y ist offen und abg in der Teilraumtopologie (aber evt. nicht in X).

11. Satz Sei $(X, \mathcal{T})$ ein top. Raum, sei $Y \subseteq X$ mit Teilraumtopologie $\mathcal{T}|Y$. Dann gilt:

(i) $A \subseteq Y$ ist abg in Teilraumtopologie $\Leftrightarrow$ es gibt $B \subseteq X$ abg. in X mit $A = Y \cap B$

(ii) Ist Y abg in X und $A \subseteq Y$ abg in TRT, so ist $A \subseteq X$ abg. in X

(iii) Ist Y offen in X und $W \subseteq Y$ offen in TRT, so ist $W \subseteq X$ offen in X

(iv) Ist $S \subseteq Y$, so ist $\overline{S} \cap Y$ der Abschluss von S in Y.

<u>Beweis</u> (i) $A \subseteq Y$ abg in TRT $\Leftrightarrow$ es gibt $U \subseteq X$ offen mit $U \cap Y = Y - A$ $\Leftrightarrow$ es gibt $U \subseteq X$ offen mit $A = Y - U = Y - (U \cap Y)$ $\Leftrightarrow$ es gibt $B \subseteq X$ abg mit $A = Y \cap B$.

(ii) Wenn $A \subseteq Y$ abg (in TRT), $A = Y \cap B$ mit $B \subseteq X$ abg in X und wenn Y abg (in X) $\Rightarrow$ A abg in X.

(iii) Wenn $W \subseteq Y$ offen in TRT, $Y \subseteq X$ offen in X, $W = V \cap Y$, V offen in X $\Rightarrow$ W offen in X.

(iv) $\overline{S} \cap Y$ ist abg in TRT und $S \subseteq \overline{S} \cap Y$. Ist $A \subseteq Y$ abg. in TRT mit $S \subseteq A$, so gibt es $B \subseteq X$ abg mit $B \cap Y = A \supseteq S \Rightarrow B \supseteq \overline{S} \Rightarrow A \supseteq \overline{S} \cap Y$.

□

<u>Beispiel</u> (a) (X, d_X) metrischer Raum, $Y \subseteq X$ Teilmenge mit der gleichen Metrik $d_Y(u,v) = d_X(u,v)$. Dann ist $\mathcal{T}_{d_X} | Y = \mathcal{T}_{d_Y}$.

(b) $X = \mathbb{R}$ mit üblicher Topologie, $Y = (-1,1) \subseteq \mathbb{R}$. Dann ist $A = (-1,0] = [-1,0] \cap Y$ abg. in Y, aber <u>nicht</u> abg. in X.

12. <u>Satz</u> Seien X, Y topologische Räume, sei $f: X \to Y$ eine Abbildung, seien $A_1, \dots, A_m \subseteq X$ abgeschlossen mit $A_1 \cup \dots \cup A_m = X$. Falls für jedes $j = 1, \dots, m$ die Einschränkung $f_j = f|_{A_j} : A_j \to Y$ stetig ist (bzgl. der Teilraumtopologie auf A_j), so ist f stetig.

<u>Beweis</u> Sei $B \subseteq Y$ abg. Dann ist $f_j^{-1}(B) = f^{-1}(B) \cap A_j$ nach Vor. abg. in A_j, also abg. in X (§ 1.11 (i), (ii)).

Damit ist $f^{-1}(B) = f_1^{-1}(B) \cup \dots \cup f_m^{-1}(B) \subseteq X$ abg. $\square$

13. <u>Bsp</u> (a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x & \text{wenn } x \geq 0 \\ -\frac{1}{2} & \text{wenn } x < 0 \end{cases}$

ist stetig auf $(-\infty, 0]$ und auf $[0, \infty)$, also stetig auf $\mathbb{R} = \underbrace{(-\infty, 0] \cup [0, \infty)}_{\text{abg}}$

(b) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{wenn } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$ ist <u>nicht</u> stetig,

aber stetig auf $\mathbb{Q}$ und stetig auf $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ (aber beide Mengen sind nicht abg. in $\mathbb{R}$!)

Jetzt betrachten wir Produkte von top. Räumen.

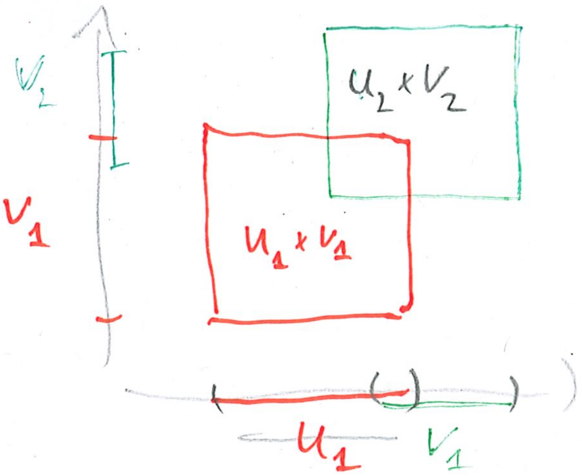
Seien $(X, \mathcal{T}_X)$ und $(Y, \mathcal{T}_Y)$ top. Räume, sei $Z = X \times Y$.

Was sollen die offenen Mengen in Z sein?

Versuch: $W \subseteq Z$ offen, wenn $W = U \times V$, $U \subseteq X$ offen und $V \subseteq Y$ offen $\leadsto$ $\emptyset, Z$ sind offen (Top 1).

$U_1, \dots, U_m \subseteq X$ offen
$V_1, \dots, V_m \subseteq Y$ offen
$(U_1 \times V_1) \cap \dots \cap (U_m \times V_m) = \left(\bigcap_{j=1}^{m} U_j\right) \times \left(\bigcap_{j=1}^{m} V_j\right)$ offen

also (Top 2). Aber (Top 3) funktioniert nicht:



$(U_1 \times V_1) \cup (U_2 \times V_2)$ ist nicht von der Form $U_3 \times V_3$.

14. Def Seien $(X_1, \mathcal{T}_1), \dots, (X_m, \mathcal{T}_m)$ top. Räume.

Setze $\mathcal{B} = \{ U_1 \times \dots \times U_m \mid U_j \subseteq X_j \text{ offen} \}$

Dann erfüllt $\mathcal{B}$ die Bedingungen (B1) und (B2) aus §1.6 für $X = X_1 \times \dots \times X_m$.

Die zugehörige Topologie $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ heißt die Produkt-

Topologie auf X.

Denn: • $X = X_1 \times \dots \times X_m \in \mathfrak{B}$ ⇝ (B1) gilt

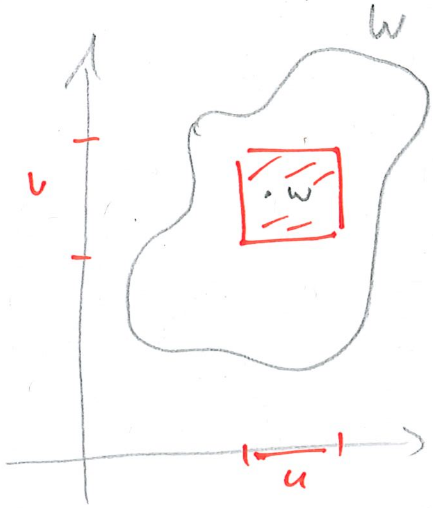
• $U_i, V_i \subseteq X_i$ offen, $i = 1, \dots, m$ ⇝

$$(U_1 \times \dots \times U_m) \cap (V_1 \times \dots \times V_m) = (U_1 \cap V_1) \times \dots \times (U_m \cap V_m) \in \mathfrak{B}$$

⇝ (B2) gilt auch. □

Bsp $X = Y = \mathbb{R}$ $\quad Z = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$

$W \subseteq \mathbb{R}^2$ offen in Produkttopologie $\Leftrightarrow$ zu jedem $w = (x,y) \in W$ gibt es offene Mengen $U \subseteq \mathbb{R}$, $V \subseteq \mathbb{R}$ mit $x \in U$, $y \in V$ und $U \times V \subseteq W$



Das ist die "korrekte" Topologie auf $\mathbb{R}^2$.

Beachte auch: für jedes $j = 1, \dots, m$ ist die Projektion

$$X = X_1 \times \dots \times X_m \xrightarrow{pr_j} X_j$$
$$(x_1, \dots, x_m) \longmapsto x_j$$

stetig, denn $pr_j^{-1}(U) = X_1 \times \dots \times X_{j-1} \times U \times X_{j+1} \times \dots \times X_m \in \mathfrak{B}$

Weiter gilt folgende universelle Eigenschaft: eine Abbildung

$F : Y \to X$ ist genau dann stetig, wenn

alle $F_j = pr_j \circ F : Y \to X_j$ stetig sind.

Denn: f stetig $\Rightarrow$ $f_j = pr_j \circ f$ auch stetig.

Wenn alle f_j stetig sind und wenn $W = U_1 \times \dots \times U_n \in \mathfrak{B}$,

dann ist $f^{-1}(W) = f_1^{-1}(U_1) \cap \dots \cap f_m^{-1}(U_m) \subseteq Y$ offen,

also ist f stetig nach §1.8. $\square$

<u>Bem</u> Eine Abbildung $f: X \to Y$ zwischen topologischen Räumen X, Y heißt <u>offen</u> (bzw. <u>abgeschlossen</u>) falls für jede offene Menge $S \subseteq X$ auch $f(S)$ offen (bzw. abgeschlossen) ist.

Die Projektionen $pr_j : X \to X_j$ oben sind offen (aber im allgemeinen nicht abgeschlossen). Denn: Wenn $U \subseteq X_1 \times \dots \times X_m$ offen ist, $u \in U \Rightarrow$ es gibt $V_1, \dots, V_m$ offen mit $u \in V_1 \times \dots \times V_m \subseteq U \Rightarrow pr_j(U) \supseteq \underbrace{V_j}_{\text{off}} \ni pr_j(u)$

$\Rightarrow pr_j(U)$ offen.

<u>Bsp</u> $X_1 = X_2 = \mathbb{R}$, $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\}$ Hyperbel

$A \subseteq \mathbb{R}^2$ abg, $pr_1(A) = \mathbb{R} - \{0\}$ <u>nicht</u> abg in $\mathbb{R}$. #

Jetzt betrachten wir unendliche Produkte.

15. Def Sei J eine Indexmenge (endlich oder unendlich) und sei $(X_j, \mathcal{T}_j)_{j\in J}$ eine Familie von top. Räumen (d.h. für jedes $j \in J$ ist $(X_j, \mathcal{T}_j)$ ein top. Raum). Sei $X = \prod_{j\in J} X_j$ das kartesische Produkt. Die Elemente von X sind also Folgen $(x_j)_{j\in J}$, wobei jedes $x_j \in X_j$. Wir betrachten zwei Basen von Topologien

$$\mathcal{B}_{Box} = \{ \prod_{j\in J} U_j \mid U_j \subseteq X_j \text{ offen} \}$$

$$\mathcal{B} = \{ \prod_{j\in J} U_j \mid U_j \subseteq X_j \text{ offen und } U_j = X_j \underbrace{\text{für fast alle } j}_{\text{nur endlich viele Ausnahmen}} \}$$

Klar $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}_{Box}$; falls J endlich ist, gilt $\mathcal{B} = \mathcal{B}_{Box}$.

Sowohl $\mathcal{B}$ als auch $\mathcal{B}_{Box}$ erfüllen (B1) und (B2) aus §1.6, denn: $X \in \mathcal{B}$ ($\leadsto$ (B1) gilt)

$$\left(\prod_{j\in J} U_j\right) \cap \left(\prod_{j\in J} V_j\right) = \prod_{j\in J} (U_j \cap V_j) \quad \text{für } U_j, V_j \subseteq X_j$$

($\leadsto$ (B2) gilt). Seien $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ und $\mathcal{T}_{\mathcal{B}_{Box}}$ die zugehörigen Topologien auf X. Für $k \in J$ definiere die Projektion $pr_k : X \longrightarrow X_k$, $(x_j)_{j\in J} \longmapsto x_k$

Ist $U_k \subseteq X_k$ offen, so ist $pr_k^{-1}(U_k) = U_k \times \prod_{j \neq k} X_j \in \mathfrak{B}$, also ist pr_k stetig bezüglich beiden Topologien.

Wir nennen $\mathfrak{T}_{\mathfrak{B}}$ die Produkttopologie.

16. Satz (über die Produkttopologie). Sei $(X_j, \mathfrak{T}_j)_{j \in J}$ eine Familie von topologischen Räumen, sei $X = \prod_{j \in J} X_j$ versehen mit der Produkttopologie $\mathfrak{T}_{\mathfrak{B}}$ aus §1.15, sei $pr_k : X \to X_k$ die Projektion. Dann hat $(X, \mathfrak{T}_{\mathfrak{B}}, (pr_k)_{k \in J})$ folgende universelle Eigenschaft.

Ist Y ein top. Raum, mit stetigen Abbildungen $f_k : Y \to X_k$ für $k \in J$, so gibt es genau eine stetige Abbildung $f : Y \to X$ so, dass für alle $k \in J$ gilt $f_k = pr_k \circ f$

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "\exists! f"] \arrow[dr] & X \arrow[d, "pr_k"] \\ & X_k \end{tikzcd}$$

Diese Eigenschaft charakterisiert $(X, \mathfrak{T}_{\mathfrak{B}}, (pr_k)_{k \in J})$ eindeutig.

Beweis: Für $y \in Y$ definieren wir $F(y) = (f_k(y))_{k \in J}$.

Beh: F ist stetig.

Denn: Sei $W = \prod_{k \in J} U_k \in \mathfrak{B} \Rightarrow U_k \subseteq X_k$ offen, es gibt $J_0 \subseteq J$ endlich mit: $U_j = X_j$ für $j \in J - J_0$.

Weiter ist $F^{-1}(W) = \bigcap_{k \in J} \underbrace{f_k^{-1}(U_k)}_{\text{fast immer } Y} = \bigcap_{j \in J_0} f_j^{-1}(U_j)$

$\Rightarrow$ $F^{-1}(W)$ ist offen in Y $\Rightarrow$ F ist stetig nach §1.8.

Ist $\tilde{F}: Y \to X$ eine weitere Abbildung mit $pr_k \circ \tilde{F} = f_k$, so folgt mit $\tilde{F}(y) = (x_j)_{j \in J}$, dass $x_k = f_k(y)$ für alle k, also $\tilde{F} = F$. Also ist F eindeutig bestimmt durch $f_k = pr_k \circ F$.

Zum Nachsatz: Angenommen, P ist ein topologischer Raum, mit stetigen Abbildungen $p_j : P \to X_j$ so, dass es zu $f_j : Y \to X_j$ stets genau eine stetige Abbildung $\tilde{F} : Y \to P$ gibt mit $f_j = p_j \circ \tilde{F}$. Wir erhalten damit

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\exists ! \alpha"] \arrow[dr, "p_j"'] & X \arrow[d, "pr_j"] \\ & X_j \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "\exists ! \beta"] \arrow[dr, "pr_j"'] & P \arrow[d, "p_j"] \\ & X_j \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\exists ! \, \beta \circ \alpha", "id"'] \arrow[dr, "p_j"'] & P \arrow[d, "p_j"] \\ & X_j \end{tikzcd}$$

$\Rightarrow$ $\Rightarrow \beta \circ \alpha = id_P$ genauso $\alpha \circ \beta = id_X$

$\Rightarrow \alpha, \beta$ sind Homöomorphismen. $\square$

Mit der Box-Topologie geht dagegen alles schief.

<u>Bsp</u> $J = \mathbb{N}$, $X_j = [0,1] = Y$, $f(t) = (t,t,t,t,\dots)$ konstante Folge

$f : Y \to \prod_{j\in\mathbb{N}} [0,1]$. Setze $U_j = [0, 2^{-j}) \subseteq X_j$ offen in X_j

$\rightsquigarrow W = \prod_{j\in\mathbb{N}} [0, 2^{-j}) \subseteq X$ ist offen in Box-Topologie

$f^{-1}(W) = \{0\} \subseteq [0,1]$ ist <u>nicht</u> offen $\Rightarrow$ f nicht stetig bzgl. Box-Topologie, aber $f_j : [0,1] \to [0,1]$, $t \mapsto t$ stetig.

unstetig in Box-Topologie

$$\begin{tikzcd}
{[0,1]} \arrow[r, "f"] \arrow[dr, equal] & \prod_{j\in\mathbb{N}} [0,1] \arrow[d, "p_j"] \\
& {[0,1]}
\end{tikzcd}$$

Die Box-Topologie ist nur für Gegenbeispiele gut.

17. <u>Def</u> Ist J eine Menge, X ein top. Raum, so ist $X^J = \prod_{j\in J} X$ die Menge aller Folgen $(x_j)_{j\in J}$ mit $j\in J$. Solche Folgen sind also <u>Abbildungen</u> $J \to X$, $j \mapsto x_j$.

Die Produkttopologie auf X^J heißt dann auch <u>Topologie der punktweisen Konvergenz</u>.

<u>Bsp</u> $X = \{0,1\}$ mit diskreter Topologie. Die Cantormenge ist $\{0,1\}^{\mathbb{N}} = \{(p_j)_{j\in\mathbb{N}} \mid p_j \in \{0,1\}\}$

Die Produkttopologie auf $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ ist <u>nicht</u> diskret (z.B. konvergiert die Folge

$$\left.\begin{matrix}(1,0,0,0\ldots) \\ (0,1,0,0\ldots) \\ (0,0,1,0,0\ldots) \\ \text{usw}\end{matrix}\quad \text{gegen } (0,0,0,0\ldots)\right)$$

und <u>interessant</u>, obwohl jedes $X_j := \{0,1\}$ diskret ist.

#